Université Montpellier 2
Faculté des Sciences
Semestre 2 du portail MIPS
2011-2012

GLMA202
CONCEPTS FONDAMENTAUX EN ANALYSE

Université Montpellier 2, Faculté des Sciences, Semestre 2 du portail MIPS, 2011-2012

GLMA202
CONCEPTS FONDAMENTAUX EN ANALYSE

Université Montpellier 2
Faculté des Sciences
Semestre 2 du portail MIPS
2011-2012

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT

Ce texte est un *polycopié d'accompagnement* de l'Unité d'Enseignement (UE) « Concepts fondamentaux en analyse » (semestre 2) du portail MIPS de la première année de Licence de la Faculté des Sciences de Montpellier, et doit être compris comme la *seconde partie* d'un enseignement d'analyse couvrant les deux semestres.

Il est destiné à fournir un cadre général (un programme très détaillé, et en tout cas beaucoup plus détaillé qu'il n'est d'usage) pour le contenu de cette UE enseignée en Cours-TD intégrés. Il a été rédigé dans l'optique de fournir aux étudiants un *complément* aux séances de cours, leur permettant de disposer d'un document de référence et éventuellement d'approfondir leur compréhension du cours oral. Il est utile de mentionner ici qu'un polycopié n'est pas un livre, d'où la présence dans le paragraphe inroductif du mot *accompagnement* : ce texte n'est absolument pas un cours complet et auto-suffisant couvrant le programme de l'UE. *Il ne se substitue donc en aucun cas au cours oral, qui doit rester la base du travail d'apprentissage*.

L'enseignant choisira ainsi de développer plus longuement certains points, en traitera plus rapidement d'autres, et enfin passera les derniers complètement sous silence. De nombreux exemples, commentaires et applications des notions ici décrites seront apportés par l'enseignant, qui les choisira en fonction de leur pertinence mais aussi de vos choix d'études et de vos objectifs professionnels[(1)]. De plus, vous constaterez peut-être que l'enseignant de votre groupe ne respecte pas totalement l'enchaînement des notions privilégié par ce texte. Si le rôle de ce polycopié est aussi de définir pour les enseignants le périmètre, en termes de contenu, de l'UE (et d'assurer une certaine cohérence entre des groupes de Cours-TD distincts), il n'a jamais été pensé comme contraignant la chronologie et le déroulement des cours qui seront délivrés dans les différents groupes. Ceux-ci s'en écarteront donc très certainement à certains moments pour y revenir par la suite, traitant certaines notions dans un ordre légèrement différent ou avec un point de vue quelque peu alternatif. Ce phénomène est normal, mais à la fin du semestre, tous les groupes auront traité de manière cohérente l'ensemble des notions au programme.

Ce texte est destiné à être utilisé par des étudiants ayant choisi une formation nécessitant une étude approfondie des mathématiques. Ses objectifs sont donc plus élevés que ceux du premier semestre. De ce fait, il fait naturellement suite à l'ensemble du contenu du polycopié d'« Algèbre linéaire et Analyse 1 » du premier semestre, *y compris ce qui y était présenté en petits caractères et dont la compréhension est maintenant une nécessité et ne saurait être omise*. Bien que les polycopiés, pour des raisons pratiques,

---

[(1)]L'auteur de ces lignes profite de cette mise en garde pour rappeler qu'une théorie mathématique sans exemples est une théorie vide ; il est donc essentiel pour chaque étudiant de se constituer un stock d'exemples décrivant chaque notion ou technique étudiée, suffisamment riche pour couvrir tous les aspects de celles-ci, et d'être en mesure de de répondre aux questions : « à quoi sert cette notion, dans quel(s) context(e) intervient-elle , comment l'utilise-t-on et quelles sont ses limites ? »

soient présentés comme deux documents disjoints, ils doivent être pensés non seulement comme complémentaires mais comme deux parties d'un même document. L'objectif de « Concepts fondamentaux en analyse » est en effet d'apporter les bases mathématiques permettant de démontrer avec toute la rigueur nécessaire les résultats énoncés dans « Algèbre linéaire et analyse 1 ». L'étudiant devra donc, au cours du second semestre, mener un travail de retour sur les enseignements ayant eu lieu quelques mois plus tôt afin de s'assurer qu'il comprend en détail pourquoi le contenu de la seconde UE lui fournit tous les éléments qui lui manquaient au premier semestre[2].

[2] A une exception notable près : celle du calcul intégral, comme expliqué au début du chapitre qui lui était consacré dans le polycopié du premier semestre.

Mode d'emploi

Un texte mathématique comporte des définitions, des exemples, des résultats, des preuves, des commentaires. Le présent polycopié obéit aux principes suivants.

Définitions. — Lorsqu'un terme est défini, ou plus généralement lorsqu'il est introduit pour la première fois et que son usage est précisé, il apparaît **en gras**. Par exemple :

> On appelle **racine carrée** d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tout nombre $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = z$.

Certaines définitions fondamentales sont de plus mises en valeur de la manière suivante :

Définition 0.0.1. — Le **module** du nombre complexe z est les nombre réel, noté $|z|$, défini par

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Attention, écrire toutes les définitions de cette manière aurait rendu certains passages peu lisibles. Il ne faut donc pas croire que seules les définitions numérotées et encadrées méritent d'être retenues et il est crucial de connaître précisément *toutes* les définitions données.

Résultats. — Les résultats sont énoncés sous forme de Lemmes, Propositions, Théorèmes, Corollaires. La plupart des énoncés sont sous la forme de *Propositions* ; les résultats les plus importants sont appelés des *Théorèmes* ; un *Corollaire* est un énoncé qui découle d'un résultat qui vient d'être établi ; un *Lemme* est un résultat préparatoire pour démontrer une Proposition ou un Théorème.

Preuves. — Les mathématiques ne se limitent pas à des définitions et à des résultats que l'on applique sans réfléchir ; d'une certaine manière, l'essentiel des mathématiques se trouve dans les *preuves* des énoncés. La plupart de celles que l'on trouvera ici sont relativement courtes et instructives : elles éclairent le résultat qu'elles démontrent, elles utilisent des notions déjà vues ou d'autres résultats déjà démontrés, elles illustrent des techniques de calcul ou de raisonnement, etc. Travailler les preuves est donc important car c'est faire des mathématiques.

Exercices. — Des exercices numérotés apparaissent au cours du texte. Ils permettent de s'entraîner sur le cours, et leur étude fait partie intégrante du travail sur le cours. Certains exercices, plus difficiles techniquement ou plus avancés conceptuellement, sont signalés par une étoile $\star$:

> ***Exercice ($\star$) 0.0.2***. — Ceci est un exercice un peu plus difficile.

Notations. — Le symbole := signifie que le terme de gauche est *défini* comme étant égal au terme de droite. Par exemple :

> Les racines n-èmes de l'unité sont exactement les n nombres complexes $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$, où $\omega := e^{2i\pi/n}$.

Dans cet énoncé, on pose $\omega := e^{2i\pi/n}$ et on utilise le symbole ω pour décrire les racines de l'unité.

Commentaires. — Enfin, comme au premier semestre, le texte propose toujours deux niveaux de lecture : le corps principal du texte où l'accent est cette fois-ci mis sur la formation de base, les concepts, et leurs démonstrations ; un second niveau, qui fournit aux étudiants portés vers les mathématiques des compléments, souvent à titre essentiellement culturel.

► Afin d'identifier aisément les objectifs des différentes sections de ce polycopié, les portions de texte correspondant au second niveau de lecture sont placés en caractères plus petits et dans des paragraphes encadrés par des symboles triangulaires, comme ceci. ◄

Un dernier point : comme tout polycopié, ce document est perfectible. Il est encore en cours d'élaboration et son contenu est donc destiné à évoluer non seulement au cours des années et des enseignants qui assureront la responsabilité de l'UE mais même au cours de ce semestre. N'hésitez pas à faire part de vos remarques à

marc.herzlich@math.univ-montp2.fr

pour signaler une erreur, poser une question, soumettre une suggestion ou pour tout commentaire.

CHAPITRE 0

PRÉLIMINAIRES

De la rigueur en mathématiques

L'un des aspects les plus nouveaux (du moins pour beaucoup d'étudiants) de cet enseignement « Concepts fondamentaux en analyse » est l'attention portée à la rigueur des raisonnements. Il est donc utile (sinon nécessaire) de faire une description concise de la forme attendue pour un texte mathématique et de l'usage de la logique qui prévaut dans cette discipline.

Tout comme l'apprentissage de la parole par les enfants procède par imitation de leurs aînés sans qu'il soit nécessaire de leur expliquer les structures du langage, l'apprentissage des mathématiques se fait au départ sans que soit nécessairement étudiées les règles de raisonnement logique qui les sous-tendent. Il arrive néanmoins un moment où cette dernière étude devient indispensable, en premier lieu parce que les objets du discours mathématique se sont au cours de l'histoire progressivement éloigné des objets du monde sensible et les méthodes utilisées en mathématiques depuis longtemps (au moins depuis Euclide...) se sont écarté des autres modes de connaissance. D'autres éléments importants (bien que plus contingents) sont la complexité et la longueur croissante des raisonnements rencontrés au cours des études universitaires, bien plus élevées que dans le secondaire.

Aussi il n'est pas inutile, à partir de la familiarité acquise au cours des années de pratique des mathématiques de l'enseignement secondaire, de prendre un peu de recul et de réfléchir sur la nature des objets rencontrés et sur les mécanismes de raisonnement utilisés. De faire en quelque sorte en mathématiques l'équivalent de l'apprentissage de la syntaxe et de la grammaire, chose finalement banale tout au moins en ce qui concerne l'usage de la langue française.

Qu'est-ce qu'un texte mathématique ?

Vu de loin, un texte mathématique se compose de 3 types d'énoncés[1] :

- des **définitions**, qui comme leur nom l'indique définissent les objets du discours mathématique à partir d'autres objets déjà définis ;
- des **propositions** (appelées aussi **lemmes**, **théorèmes**, **corollaires**...) où sont affirmées des propriétés des objets précédemment définis ;
- des **démonstrations**, où l'on trouve la preuve des propriétés énoncées antérieurement.

[1] S'ajoute à cette typologie tout ce qui fait la saveur d'un texte mathématique : exemples, motivations, commentaires, etc. dont la présence est souvent indispensable pour la compréhension mais (au moins formellement) n'est pas nécessaire pour la cohérence logique du discours.

Les définitions se reconnaissent aisément. Bien que parfois déguisées, elle peuvent toujours se récrire sous la forme suivante : « Un objet qui vérifie telle et telle propriété est appelé... », suivi d'un mot *nouveau* c'est-à-dire (en principe) qui n'est jamais apparu précédemment.

Les propositions et les démonstrations mathématiques se ressemblent : elles sont constituées de ce que nous appellerons des **assertions mathématiques**. Les assertions mathématiques sont des énoncés, respectant certaines règles de construction, et qui, de plus possèdent ce que nous appelerons une « valeur de vérité » : *vrai* ou *faux*. Propositions et démonstrations se distinguent par la façon dont le vrai et le faux y interviennent. Lorsque l'on énonce une proposition, on affirme (arbitrairement, c'est-à-dire sans justification à ce stade) qu'une certaine propriété est vraie. Lorsque l'on fait une démonstration, on part d'une ou plusieurs propriétés que l'on sait vraies (des propositions énoncées et démontrées précédemment) et on progresse grâce à l'usage de règles logiques bien identifiées jusqu'à parvenir à la proposition souhaitée[2].

Nous verrons plus loin qu'une assertion mathématique bien construite obéit à la règle du **tiers-exclu**, c'est-à-dire qu'elle ne peut être que *vraie* ou *fausse*, qu'elle doit être l'un ou l'autre et qu'elle ne peut pas être les deux à la fois. Pour bien comprendre ce que signifie cette affirmation, il nous faudra cependant passer un peu de temps sur ce que « bien construite » veut dire. Nous renviendrons donc un peu plus loin sur l'attribution d'une valeur de vérité à chaque assertion

Mais en quoi consiste une assertion ? Pour mieux le comprendre, prenons des exemples.

(a) $0 = 1$;
(b) Tout chien est un animal ;
(c) 2 est un nombre pair ;
(d) n est un nombre pair ;
(e) si x, y et z sont les longueurs des côtés et de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, alors $x^2+y^2 = z^2$;
(f) l'hypothèse de Riemann généralisée entraîne la conjecture faible de Goldbach et l'hypothèse de Lindelöf mais ne prouve pas la conjecture *abc*.

Parmi celles-ci, la quatrième et la cinquième sont intéressantes : elles contiennent ce que nous appellerons des **variables** (les lettres n, x, y et z), dont les valeurs peuvent varier, d'où leurs noms ! Ici la zone dans laquelle ces valeurs se situent n'est pas ici précisée de façon explicite. L'assertion (c) se distingue de la (d) par la présence du chiffre 2 à la place de la variable n : ce symbole 2 n'est pas une variable mais une **constante** : un symbole dont le sens est connu sans ambiguïté. Les mathématiques contiennent de nombreuses constantes comme les différents chiffres, les nombres π ou e, etc.

La cinquième assertion contient l'expression « si... alors... » autrement dit une **implication**, outil logique d'usage essentiel en mathématiques. La dernière assertion est la plus complexe : elle contient non-seulement une implication (en fait plusieurs) mais aussi une négation et un mot comme « et ». L'implication, la négation, etc. sont des **connecteurs logiques**, qui servent à fabriquer de nouvelles assertions à partir d'anciennes. On peut par exemple découper l'assertion (f) en sous-unités « élementaires » (qui sont elles-mêmes des assertions !) en notant P=[l'hypothèse de Riemann généralisée], Q=[la conjecture faible de Goldbach], R=[l'hypothèse de Lindelöf] et S=[la conjecture *abc*]. Elle devient alors « P entraîne Q et R mais P ne prouve pas S », ou encore, en utilisant un langage plus usuel en mathématiques : « P implique Q et R et P n'implique pas S. »

Définir précisément ce qu'est une « unité de base » d'une assertion est une tâche plus délicate : comme on l'a vu, les assertions sont composées de sous-unités qui sont elles-mêmes des assertions, et

[2]Dans un cours de mathématiques, on rencontrera quelquefois des énoncés *admis* mais ils sont rares et, par principe, la démonstration existe et est accessible au prix d'un peu d'efforts, par exemple la lecture d'une portion d'ouvrage en BU...

en juxtaposant deux assertions (ou plus) avec des mots comme « et », « ou », « si... alors... », on peut fabriquer de nouvelles assertions. Autrement dit, le serpend se mord allègrement la queue. Sans entrer trop loin dans le territoire de la Logique Mathématique (avec des majuscules, en tant que sous-domaine constitué au sein des mathématiques), nous nous contenterons, modestement, de dire qu'une assertion mathématique exprime toujours une relation ensembliste, c'est-à-dire l'appartenance (symbole $\in$) d'éléments à un ensemble, l'inclusion (symbole $\subset$) d'un ensemble dans un autre et l'égalité (symbole $=$) entre deux éléments ou entre deux ensembles. Précisons les choses avec certains exemples précédents : les assertions (d) et (e) expriment bien l'appartenance d'un entier naturel à l'ensemble des entiers pairs ; quant au théorème de Pythagore (e), il peut se récrire comme suit : « si le triplet de nombres réels (x, y, z) est un élément de l'ensemble des longeurs des côtés et de l'hypoténuse de l'ensemble des triangles rectangles, alors il fait également partie de l'ensemble des nombres (réels) qui vérifient $x^2 + y^2 = z^2$ ». Il n'est pas difficile d'imaginer à partir de cet exemple comment, de manière plus générale, on peut interpréter toute formule (égalité, inégalité, etc.) comme une relation ensembliste, meme si dans la pratique on n'explicite bien entendu quasiment jamais cette interprétation.

On peut de plus fabriquer de nouvelles assertions à partir de celles déjà connues en les reliant à l'aide de l'un des 5 **connecteurs logiques** suivants :

(i) « non » : si P est une assertion, alors « non-P » est une assertion, appelée **négation** de P ;
(ii) « et » : si P et Q sont deux assertions, alors « P et Q » est une nouvelle assertion ;
(iii) « ou » : si P et Q sont deux assertions, alors « P ou Q » est une nouvelle assertion ;
(iv) « implique » (souvent noté $\Rightarrow$) : si P et Q sont deux assertions, alors « P implique Q » (ou « si P alors Q », noté $P \Rightarrow Q$) est une nouvelle assertion ;
(v) « est équivalent à » (souvent noté $\Leftrightarrow$) : si P et Q sont deux assertions, alors « P est équivalent à Q » (souvent noté $P \Leftrightarrow Q$) est une nouvelle assertion.

Remarque. — Afin de rendre plus compréhensibles les assertions mathématiques, il est souvent utile de les doter de parenthèses qui aident à en expliciter la nature (et le sens). Ainsi « $P \Leftrightarrow Q$ ou R » signifie-t-elle « $P \Leftrightarrow (Q$ ou $R)$ » ou bien « $(P \Leftrightarrow Q)$ ou R » ? De même, « $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ » est incompréhensible : s'agit-il de « $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ » ou bien de « $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ » ? Et l'assertion (c) de tout à l'heure qui s'écrivait « l'hypothèse de Riemann généralisée entraîne la conjecture faible de Goldbach et l'hypothèse de Lindelöf mais ne prouve pas la conjecture *abc* » est en réalité « $(P \Rightarrow (Q$ et $R))$ et non-$(P \Rightarrow S)$ ».

Pour compléter notre tour d'horizon des procédés de fabrication d'assertions mathématiques, il nous faut maintenant introduire un dernier outil : les quantificateurs. Il arrive fréquemment que les assertions auxquelles on s'intéresse contiennent des paramètres (comme précédemment, nous parlerons de *variables*) et que l'on doive les étudier pour toute une série de valeurs de ces paramètres. On ne peut alors écrire notre assertion sous une forme finie que si les valeurs possibles sont en nombre *fini*. Par exemple, on peut traduire le fait qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 4 par « $P(0)$ et $P(1)$ et $P(2)$ et $P(3)$ et $P(4)$ ». En revanche, si $P(n)$ doit être considérée pour tous les entiers, nous sommes conduits[(3)] à introduire le symbole $\forall$ (« pour tout »), appelé aussi **quantificateur universel**. Ainsi, si $P(x)$ est toujours une assertion concernant la variable x, on écrira

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

si l'on souhaite considérer l'assertion $P(x)$ lorsque l'ensemble des valeurs possibles de x est l'ensemble E. Enfin le **quantificateur existentiel** $\exists$ (« il existe ») conduit à des assertions du type

$$\exists x \in E \text{ tel que } Q(x),$$

[(3)]En réalité, il y a d'autres raisons pour cela, par exemple le fait que l'ensemble de valeurs possibles puisse être tellement gros qu'il soit impossible d'énumérer ses éléments (voir la suite du cours sur l'infini), ou encore le fait que, formellement, une juxtaposition infinie d'assertions reliées par des « et » n'est pas une assertion (les points de suspension ne sont pas autorisés...)

qui se lit « il existe (au moins un) x dans l'ensemble E vérifiant $Q(x)$ ».

Le langage ensembliste, les connecteurs logiques, les quantificateurs et une quantité éventuellement très élevée de symboles à utiliser pour désigner les variables et les constantes suffisent à la Logique des Logiciens (toujours avec des majuscules) pour construire toutes les assertions mathématiques. Nous n'irons pas plus loin dans cette voie, et en particulier nous n'essaierons pas de traduire tout énoncé en des termes ensemblistes. Beaucoup plus modestement, nous retiendrons que **le langage mathématique manipule au départ des assertions simples (éventuellement exprimées dans la langue naturelle mais qui, lorsqu'on les traduit en langage formalisé, recouvrent des relations ensemblistes) composées de variables, de constantes et des symboles ensemblistes usuels ($=$, $\in$, $\subset$). Ces assertions sont ensuite combinées entre elles pour former de nouvelles assertions, plus complexes, à l'aide des connecteurs logiques et des quantificateurs**.

L'usage des quantificateurs au sein d'un langage au moins partiellement formalisé est systématique dans tous les raisonnements mathématiques un peu élaborés et il est donc essentiel de les manipuler avec aisance. Par exemple, l'ordre des quantificateurs n'est pas innocent, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice. — On considère sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des femmes, l'assertion suivante :

$$P(x,y) = \text{« } x \text{ est la fille de } y \text{ ».}$$

Formaliser avec des quantificateurs les phrases suivantes :

(a) On peut trouver deux femmes dont l'une est la fille de l'autre.
(b) Il y a une femme qui est la fille de toutes les autres.
(c) Toute femme a au moins une fille.
(d) On peut trouver une femme mère de toutes les autres.
(e) Toute femme a une mère.
(f) Toute femme est fille de toute femme.

Dans les assertions « $\forall x \in E, P(x)$ » ou « $\exists x \in E$ *tel que* $Q(x)$ », la variable x jouit d'un statut particulier : celle-ci est en effet dite **variable muette**, car on pourrait remplacer toutes ses occurrences par un autre symbole (par exemple y, z, α... mais aussi $\aleph$ ou pourquoi pas $\heartsuit$) sans changer la nature de l'assertion[4]. Ainsi, dans l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x \geq 0$ », la variable x est muette et l'assertion est la même que « $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $a \geq 0$ ». En revanche, on voit bien que les assertions « $\forall x \geq \alpha$, $x \geq 0$ » et « $\forall x \geq \beta$, $x \geq 0$ » sont différentes. L'ensemble des valeurs possibles d'une variable x peut être lui-même une variable, muette dans certains cas (si elle est elle-même soumise à un quantificateur) ou non (ainsi dans nos exemples ci-dessus le symbole E désigne une variable non-muette) ou une constante, si le sens du symbole est universellement connu (par exemple dans « $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ »).

Une assertion qui comprend une variable non-muette (ou plusieurs...) est dite **ouverte** ; dans le cas contraire, on parlera d'assertion **fermée** (ou close). Les assertions fermées comprennent donc des symboles ensemblistes, des quantificateurs, des constantes, des variables muettes (uniquement) et des connecteurs logiques, assemblés selon les règles énoncées plus haut. La plupart des assertions mathématiques utilisées dans un cours ou un raisonnement ne se présentent pas naturellement sous une forme fermée. En effet il est fréquent que le sens de certaines variables ait été précisé auparavant dans le raisonnement. Une phrase mathématique n'est (en général) jamais isolée de son contexte, et ce contexte a une influence, notamment sur la réalité recouverte par les variables. Les étudiants doivent donc être extrêmement attentifs à ce point : lorsqu'une variable apparait dans un énoncé, quelle est sa nature ? A-t-elle déjà été rencontrée auparavant ? Lui a-t-on fixé une valeur explicite, ou alors l'ensemble auquel elle appartient a-t-il été précisé ?

---

[4] A condition de remplacer *absolument toutes* les occurences de x par le nouveau symbole. Ainsi, on écrira indifférement « $\forall x \in E, P(x)$ » ou « $\forall \alpha \in E, P(\alpha)$ » car elles sont identiques, mais « $\forall x \in E, P(y)$ » est une assertion différente !

Exemples. — On considère les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = \pi$.
3. Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

4. $\forall (u,v) \in E^2, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$.

L'assertion 1 est clairement fermée (l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est une constante, de même que 2 et 0). L'assertion 2 est évidemment ouverte (qu'est-ce que y ?). L'assertion 3 est fermée (vérifiez-le !). Enfin, prise isolément, l'assertion 4 est ouverte (car E n'est pas ici une variable muette).

► ***Remarque***. — Affirmer que « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie *ne signifie pas que l'on dispose d'un élément de E qui porte le nom x* mais simplement que dès que l'on prend un élément dans E, il a une certaine propriété. Pour pouvoir raisonner sur un élément x (ou y, ou a...) bien identifié de E, il faut avoir préalablement décidé de qui il s'agit, c'est-à-dire ce que désigne exactement le symbole x (ou y, ou a...) et éventuellement comment cet élément a été choisi. Cette subtilité joue un rôle très important lorsque l'on commence à attribuer une valeur de vérité aux assertions. Ainsi, dans le raisonnement

« on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ donc $x^2 \geq -1$ car $0 \geq -1$ »,

la variable x est muette dans la partie de la phrase qui précède le « donc ». On peut alors remplacer le symbole x par n'importe quel autre symbole, par exemple y. Notre raisonnement est donc identique à

« on sait que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0$ donc $x^2 \geq -1$ car $0 \geq -1$ »

où la variable x restante n'est pas muette... et nous n'avons pas préalablement attribué de sens à cette notation. On ne peut donc pas attribuer de valeur claire de vérité à notre raisonnement car il ne précsie pas où vit x (et sans précisions, on pourrait très bien imaginer par exemple que $x = 2i$... !) Pour obtenir un raisonnement acceptable, il faut écrire

« on sait que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0$; prenons un réel x, alors $x^2 \geq -1$ car $0 \geq -1$ ».

Ces mêmes remarques valent pour le quantificateur existentiel : si l'on suit de manière très rigoureuse les règles de la logique, affirmer que l'assertion « $\exists x \in E$ tel que $Q(x)$ » est vraie ne signifie pas non plus que l'on dispose désormais d'un élément x de E qui vérifie $Q(x)$, et comme précédemment, il faudrait en toute rigueur écrire « $\exists x \in E$ tel que $Q(x)$; soit un tel x, alors x est... ». Dans la pratique, le lecteur prendra garde au fait qu'on ne respecte en général pas cette contrainte[5] ; il est néanmoins bon de la garder en mémoire, ne serait-ce que pour bien distinguer les notations qui désignent des objets définis de manière précise (intangibles donc) des variables muettes qui peuvent donc être librement modifiées. ◄

[5] On écrira donc souvent « $\exists x \in E$ tel que $Q(x)$; alors x est... ».

Le vrai et le faux

Le raisonnement mathématique ne trouve de l'intérêt que lorsque l'on introduit les valeurs de vérité dans le paysage (sans cet aspect, il ne s'agirait que de constructions formelles complètement abstraites). Il s'agit d'une donnée supplémentaire par rapport aux principes de construction des assertions mathématiques : il ne s'agit en effet plus de syntaxe (avec le même sens que lorsqu'on apprend la langue française : l'ensemble des règles qui permettent de construire des phrases grammaticalement correctes) mais de *sémantique* (c'est-à-dire que le sens des phrases entre désormais en considération).

En nous fondant sur les paragraphes précédents, nous pouvons expliciter de manière désormais satisfaisante le principe du tiers-exclu évoqué au tout début de chapitre. Le cas le plus simple est celui des assertions fermées.

***Principe numéro 1* (tiers-exclu)**. — *Toute assertion* fermée *est soit vraie, soit fausse. Elle est forcément l'un ou l'autre et ne peut être les deux à la fois.*

Malheureusement, comme nous l'avons vu, le monde mathématique n'est pas aussi simple car il n'est pas peuplé que d'assertions fermées. De nombreuses autres assertions possèdent également une valeur de vérité bien définie. On rencontre par exemple fréquemment les cas suivants :

- des assertions ouvertes comprenant des variables non-muettes pour lesquelles il a été précisé auparavant qu'elles étaient égales à certaines constantes ou dont leur domaine de définition a été explicité (cas typique : l'assertion « $2n$ est pair » est évidemment vraie si elle a été précédée quelques lignes ou pages auparavant de « Soit $n = 4$ » ou même simplement de « Soit n un entier ») ;
- des assertions ouvertes comprenant des variables non-muettes qui vérifient des relations introduites préalablement dans le raisonnement (cas typique : l'assertion « $\forall (x, y) \in A, x-y \geq 0$ » est ouverte... mais elle devient vraie si l'on a précisé auparavant que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 2\}$) ;
- des assertions apparemment ouvertes mais où un quantificateur supplémentaire est présent de manière implicite (on trouve souvent ce type de situations dans les énoncés de théorèmes qui commencent par exemple par « Soit E un espace vectoriel de dimension finie... » ou « Soit f une fonction... » : ici le mot « Soit » cache en réalité un quantificateur : « Pour tout espace vectoriel E de dimension finie... », « Pour toute fonction f... »)

Les étudiants doivent donc être attentifs à détecter quelles assertions peuvent hériter de manière définitive d'une valeur de vérité et lesquelles ne le peuvent pas. Une attitude utile consiste à faire marcher son esprit critique en face de toute assertion et à vérifier en premier lieu si elle est fermée. Si oui, tout va bien. Si non, il faut alors partir en chasse de tous les éléments qui permettent de s'assurer qu'on peut sans danger lui attribuer une valeur de vérité.

Remarque. — Il se peut que l'on soit incapable de décider de la valeur de vérité d'une assertion, même fermée, faute par exemple d'informations complémentaires ou d'incapacité à faire la preuve de la véracité ou de la fausseté de la dite assertion. Ce fait ne remet pas en cause notre principe.

Il nous faut maintenant expliquer comment, à partir des valeurs de vérité d'assertions élémentaires (supposées connues), on peut en déduire la valeur de vérité d'assertions composées à l'aide des connecteurs logiques. Le cas de la négation est le plus simple.

Principe numéro 2. — *La négation d'une assertion est vraie exactement lorsque l'assertion d'origine est fausse ; elle est fausse exactement lorsque l'assertion d'origine est vraie.*

La négation d'une assertion quantifiée est une source inépuisable de difficultés. Appliquons la règle que nous venons de définir à l'assertion « $\forall x \in E, P(x)$ » : elle est fausse si et seulement s'il existe un élément x de l'ensemble E pour lequel l'assertion $P(x)$ n'est *pas* vérifiée. Inversement, dire qu'elle est vraie signifie qu'on ne pourra jamais trouver un tel x. En résumé :

Principe numéro 3. — *La négation de «* $\forall x \in E, P(x)$ *» est «* $\exists x \in E$ tel que non-$P(x)$ *».*

Principe numéro 4. — *La négation de «* $\exists x \in E$ tel que $Q(x)$ *» est «* $\forall x \in E$, non-$Q(x)$ *».*

Lorsque plusieurs quantifications sont emboîtées, un usage mécanique des principes 3 et 4 permet d'identifier aisément la négation d'une assertion plus complexe : ainsi, la négation de l'assertion contenant un quantificateur universel suivi d'un quantificateur existentiel « $\forall x \in E, \ \exists y \in W(x)$ tel que $R(x,y)$ » est « $\exists x \in E$ tel que $\forall y \in W(x)$, non-$R(x,y)$ ».

Il est important de noter que ces choix pour la négation d'une assertion quantifiée définissent le vrai comme une notion extrêmement exigeante. Elles reviennent en effet à un poser le principe suivant.

***Principe numéro 5* (volontairement flou)**. — *Une assertion est vraie seulement lorsqu'elle ne possède pas de contre-exemple.*

Le cas où le principe précédent se comprend le mieux est celui où l'assertion considérée commence par un quantificateur universel : « $\forall x \in E, \ P(x)$ ». Dire que cette phrase est fausse signifie donc que l'on peut trouver au moins un élément dans E (mais éventuellement seulement un), appelons-le x_0, tel que $P(x_0)$ soit faux. Autrement dit la négation « $\exists y \in E$ tel que non-$P(y)$ » est vraie. Inversement, affirmer que « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie consiste à clamer haut et fort une propriété très exigeante : quoi qu'on fasse et quelles que soient les circonstances dans lequelles on se situe, il n'y a aucun moyen de trouver un x_0 tel que $P(x_0)$ soit faux, et ceci restera vrai pour toujours dans le futur ! Autrement dit, pour qu'une assertion soit fausse, il suffit de trouver un seul contre-exemple, c'est-à-dire un seul cas (même très particulier ou complètement pathologique) où l'assertion est fausse. L'une des forces des mathématiques est de fournir des outils incroyablement robustes pour l'ensemble des disciplines scientifiques. Le prix à payer pour cette efficacité est la difficulté à mettre la main sur des assertions vraies : il suffit d'un seul contre-exemple pour faire s'écrouler tout l'édifice et ne se retrouver qu'avec des énoncés faux... Une conséquence de ce choix est aussi la nécessité impérieuse d'identifier avec précision le champ d'application d'un énoncé. Faute de ce travail, il s'avère impossible de lui attribuer une valeur fiable de vérité.

La plupart des énoncés mathématiques commencent par un quantificateur universel (« $\forall x \in E, P(x)$ ») ou alors affirment une existence (« $\exists x \in E$ tel que $Q(x)$ »)[(6)], ce qui suffit à appréhender le vrai dans la plupart des énoncés.

Passons maintenant aux autres connecteurs logiques. Les règles concernant le « et » et le « ou » sont faciles à accepter :

Principe numéro 6. — *L'assertion «* A *et* B *» est vraie si et seulement si* A *est vraie et* B *est vraie. Elle est donc fausse dans les trois cas suivants :* A *fausse et* B *fausse,* A *vraie et* B *fausse,* A *fausse et* B *vraie.*

Principe numéro 7. — *L'assertion «* A *ou* B *» est vraie dans les trois cas suivants :* A *vraie et* B *vraie,* A *vraie et* B *fausse,* A *fausse et* B *vraie. Elle est fausse si et seulement si* A *est fausse et* B *est fausse.*

---

(6) Les quantificateurs sont parfois bien cachés. Ainsi, l'énoncé « le nombre de vecteurs d'une famille libre dans un espace vectoriel de dimension finie est inférieur ou égal à la dimension » doit être récrit comme « pour tout espace vectoriel de dimension finie et pour toute famille libre de vecteurs au sein de celui-ci, ... » pour faire apparaitre des quantificateurs.

Comme pour le « non », le cas du « et » ne doit pas provoquer de surprise : il s'agit de l'usage des langues naturelles. Le cas du « ou » est déjà plus délicat : il s'agit d'un « ou inclusif » c'est-à-dire que l'on considère comme vraie une assertion où chacun des deux termes est vrai alors que le français a souvent tendance à privilégier le « ou exclusif » c'est-à-dire le « ou bien... ou bien... » (« fromage ou dessert ? »)(7).

L'implication est le morceau délicat. Pour bien comprendre la règle la concernant, il nous faut revenir au principe flou numéro 5 (non existence de contrexemple). Appliquée à l'implication, cette exigence conduit à la règle suivante.

Principe numéro 8. — *Une implication du type « $A \Rightarrow B$ » est fausse si et seulement si A* est vraie et B est fausse. *Elle est donc vraie dans* tous *les autres cas.*

Cette règle est justifiée par notre choix précédent : vrai signifie absence de contre-exemple. Or l'existence d'un contre-exemple signifie précisément que l'on dispose d'une situation où l'assertion A (l'hypothèse) est vraie et l'assertion B (la conclusion) est fausse. Si l'assertion A est définitivement fausse, nous n'avons aucune chance de trouver une situation où A est vraie et B est fausse, donc nous pouvons abandonner tout espoir de mettre la main sur un contre-exemple. Par conséquent, il nous faut accepter que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie ! En conclusion, une implication « $A \Rightarrow B$ » est donc

– fausse si A est vraie et B est fausse ;
– vraie si A est vraie et B est vraie, ou bien si A est fausse (et la vérité de B est sans importance) !

La règle que nous venons d'adopter pour la véracité d'une implication peut se comprendre plus aisément si on l'interprète sous la forme d'un contrat ou d'un engagement. Pour prendre un exemple simple mais évocateur : personne ne vous traitera de menteur si vous affirmez le lundi « demain, s'il pleut je prends mon parapluie » et que vous vous promenez les mains vides le mardi sous un beau soleil !

En mathématiques, cette règle mène cependant à des affirmations un peu surprenantes pour l'intuition. Ainsi l'assertion « $0 = 1 \Rightarrow -1 > 0$ » est... vraie ! Ce qui signifie simplement que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes : ou bien $0 = 1$ et $-1 > 0$, ou bien 0 n'est pas égal à 1. Nous savons bien que c'est la deuxième situation qui est vraie, donc l'implication est vraie. Un corollaire de ce discours est que *la véracité de l'implication $A \Rightarrow B$ n'a aucune conséquence sur la véracité de la conclusion B*. En effet l'implication est en particulier vraie dès que l'hypothèse est fausse, et la valeur de vérité de la conclusion est alors sans importance. En revanche (et c'est souvent là le point important) une implication de ce type n'a en général aucun intérêt pratique puisqu'elle ne nous apporte aucune information sur la la conclusion(8).

Nous retiendrons donc qu'affirmer la véracité d'une implication n'implique pas la véracité de sa conclusion ! Par exemple, ce n'est pas parce que l'implication « $0 = 1 \Rightarrow -1 > 0$ » est vraie que l'on peut en déduire que la conclusion « $-1 > 0$ » est vraie. Pour obtenir la véracité de B à partir de la véracité de l'implication $A \Rightarrow B$, il nous faut disposer non pas de *une* mais de *deux* informations :

– la véracité de l'implication $A \Rightarrow B$,
– et la véracité de l'hypothèse A.

(7)Une plaisanterie classique en milieu mathématique consiste à répondre simplement « Oui. » à la question qui suit inévitablement toute annonce de naissance : « C'est une fille ou un garçon ? ».
(8)De manière générale, la véracité d'un énoncé et son intérêt sont deux notions complètement distinctes : il existe des milliards d'énoncés vrais mais totalement creux.

En effet, la véracité de l'implication signifie : ou bien A et B sont vraies, ou bien A est fausse. Comme nous savons par ailleurs que A est vraie, nous sommes dans le premier cas et B est nécessairement vraie.

L'ensemble des principes énoncés ci-dessus permet de fabriquer, pour toute assertion construite à l'aide des connecteurs logiques, une **table de vérité** qui indique la valeur de vérité d'une assertion en fonction de celles des briques éléméntaires qui la composent : tout choix de valeur de vérité pour ces dernières (un tel choix s'appelle une **interprétation**) conduit à une unique valeur de vérité pour l'assertion composée. Nous donnons ci-dessus la table correspondant aux connecteurs logiques, en y ajoutant l'équivalence « $A \Leftrightarrow B$ », qui est « $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$ ».

A	B	non-A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

A titre d'exercice, construisons (par étapes successives) la table de l'assertion « $((A \Rightarrow B)$ et $A) \Rightarrow B$ » (la véracité d'une implication et de son hypothèse implique la conclusion) :

A	B	$A \Longrightarrow B$	$(A \Longrightarrow B)$ et A	$((A \Rightarrow B)$ **et** $A) \Rightarrow B$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Nous constatons que cette assertion est *toujours vraie*, quelles que soient les valeurs de vérité de A et de B. Une telle assertion s'appelle une **tautologie**, et celle que nous venons de considérer, qui porte le nom de *modus ponens*, constitue le plus important outil sous-jacent à tout travail de preuve en mathématiques.

Démonstrations

Afin d'affecter aux assertions qu'ils utilisent une valeur définitive de vérité, les mathématiciens ne disposent que d'un seul outil : la démonstration. Faire une démonstration, c'est utiliser de manière enchaînée les principes logiques précédents pour décider de façon certaine de la valeur de vérité d'une assertion. Le *modus ponens* que nous venons de rencontrer est le premier de ces outils permettant d'avancer dans un raisonnement : de fait qu'est-ce qu'une démonstration sinon partir d'un ou de plusieurs énoncés que l'on sait vrai et utiliser des implications (que nous savons par ailleurs vraies) pour obtenir de nouvelles assertions vraies à l'aide du *modus ponens* ?

Les raisonnements mathématiques se fondent parfois sur d'autres principes, qui reposent également sur des tautologies. En voici quelques-unes qui sont très utiles :

(i) A ou non-A (principe du tiers-exclu) ;
(ii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$ (les deux écritures de l'équivalence) ;
(iii) non-$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A$ et non-$B)$ (existence d'un contre-exemple) ;
(iiv) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ($non-$B \Rightarrow$ non-$A)$ (**contraposée**).

Exercice. — Ecrire les tables de vérité de ces assertions et vérifier qu'il s'agit bien de tautologies.

A l'exception de la première (qui est de nature essentiellement théorique), toutes les tautologies de cette liste ont un grand intérêt pratique dans les démonstrations. Ainsi la deuxième donne une méthode pour prouver une équivalence : il faut prouver les deux implications qui la composent. La troisième montre précisément ce que signifie la fausseté d'une implication : si nous savons que « $A \Rightarrow B$ » est fausse, alors nous savons que A est vraie et B est fausse.

La dernière tautologie de la liste indique que pour démontrer la véracité d'une implication « $A \Rightarrow B$ », il suffit de démontrer la véracité de son **implication contraposée** « non-$B \Rightarrow$ non-A »... ce qui est parfois beaucoup plus facile ! Cette démarche est reliée à celle qui porte le nom bien connu de **démonstration par l'absurde** (mais elle est différente). Lorsque l'on souhaite démontrer par l'absurde la véracité d'une implication « $A \Rightarrow B$ », on fait l'hypothèse que A est vraie et B est fausse et on cherche à déduire de ces informations une contradiction, c'est-à-dire qu'une autre assertion, appelons-la C, est fausse alors que nous savons pertinemment que C est vraie. Lorsque l'on souhaite démontrer par contraposée la véracité d'une implication « $A \Rightarrow B$ », on fait l'hypothèse que B est fausse et on cherche à en déduire que A est fausse, ce qui n'est pas tout à fait la même chose.

L'ensemble de ces techniques (plus d'autres sur lesquelles nous reviendrons par la suite, comme par exemple le raisonnement par récurrence) permettent d'affecter de manière sûre une valeur de vérité aux assertions dont nous aurons besoin.

Remarque. — Il est utile à ce stade de revenir sur la méthode de démonstration de la véracité d'une implication. Comme nous l'avons vu, la véracité d'une implication n'implique pas que sa conclusion soit vraie. Néanmoins, si l'hypothèse est fausse alors l'implication est automatiquement vraie et il n'y a rien à prouver. En conséquence, si l'on veut montrer que $A \Rightarrow B$ est vraie, il suffit de montrer que B est vraie dès que l'on se place dans une situation où A est vraie. Ceci explique pourquoi lorsque l'on veut prouver une implication $A \Rightarrow B$, on fait l'hypothèse que A est vraie et on essaie d'en déduire la véracité de la conclusion B à partir de cette information.

► En réalité, « démontrable » et « vrai » sont deux notions différentes. Les démonstrations (suites d'assertions vraies déduites les unes des autres en respectant les règles logiques que nous venons d'énoncer) permettent de prouver la véracité d'assertions nouvelles en partant d'assertions vraies déjà connues. Une assertion démontrable est donc nécessairement vraie, mais il pourrait exister (et de fait il existe) des assertions *indémontrables*, au sens où on ne peut déduire leur véracité à partir d'assertions déjà connues par l'intermédiaire des règles logiques de démonstration que nous venons d'esquisser. Ce phénomène extrêmement surprenant a été découvert et étudié depuis le milieu du XXe siècle. Mais que le lecteur se rassure, ces énoncés sont extrêmement peu fréquents, font intervenir de manière profonde les fondements des mathématiques, et ne se rencontrent pas (sinon à titre culturel) dans les mathématiques de premier cycle universitaire. ◄

Conclusion

Nous en savons maintenant assez pour revenir à la pratique des mathématiques. Que retenir de ces considérations ? Les points suivants peuvent être mis en avant.

- **Tout d'abord, nous possédons des éléments précis permettant de formaliser de manière satisfaisante les raisonnements mathématiques que nous allons tenir : nous utiliserons à cette fin les connecteurs logiques et les quantificateurs afin de combiner entre elles des assertions simples et aboutir à des énoncés plus élaborés.**
- **En second lieu, nous connaissons désormais les règles de base qui permettent de manipuler les valeurs de vérité de nos assertions complexes en fonction de celles des assertions simples qui les composent.**
- **Enfin, nous disposons d'un certain nombre d'outils pour nous guider dans la pratique des démonstrations mathématiques, et ainsi accroitre notre stock d'assertions connues pour être vraies.**

Ces règles doivent être comprises à la fois comme des guides et comme des garde-fous dans tous les énoncés et démonstrations que nous écrirons : elles sont contraignantes, mais en s'attachant à les respecter nous sommes assurés de ne pas commettre d'erreurs de logique.

Exercices. —

Exercice 1. — Ecrire les négations des assertions suivantes :
(a) $x \in A$ et $y \in B$;
(b) $\exists x \in A$ tel que $\forall y \in B, P(x, y)$;
(c) $\exists\,! x \in A$ tel que $P(x)$ (« $\exists\,!$ » signifie « il existe un unique ») ;
(d) ($x \geq -1$ et ($\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \geq 1$)) ou ($x \geq 10$).

Exercice 2. — Soient P et Q deux assertions. Montrer que « non-(P et Q) » et « non-P ou non-Q » sont des assertions équivalentes. Faire de même pour « non-(P ou Q) » et « non-P et non-Q ».

Exercice 3. — Soient P et Q deux assertions. Donner la table de vérité de $P \Rightarrow Q$, de $Q \Rightarrow P$ (implication **réciproque**) et de non-$P \Rightarrow$ non-Q (contraposée de la réciproque). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4. — Un étudiant écrit dans une copie : « On sait que si s est un réel négatif, alors s est inférieur ou égal à 1 et son carré est positif ou nul. Prenons maintenant t un réel tel que t^2 soit positif ou nul, alors t est négatif ou alors t est positif et strictement plus grand que 1. » Qu'en pensez-vous ?

Exercice 5. — On considère les connecteurs logiques *xou*, qui est le *ou exclusif* (ou bien... ou bien...), *nou* qui est défini par « A nou B = non-(A ou B) » et *net* qui est défini par « A net B = non-(A et B) ». Comment exprime-t-on *xou* à partir des connecteurs habituels ? Quelle est leur table de vérité ? Montrer que ces connecteurs permettent de retrouver les différents connecteurs usuels. Quelle est la table de vérité de « A net A » ?

Exercice 6. — Soient P, Q et R trois assertions mathématiques.
(a) Montrer que (P et (Q ou R)) $\Leftrightarrow$ ((P et Q) ou (P et R)).
(b) En déduire que si A, B et C sont trois parties d'un ensemble E, alors $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(c) Dans (a), peut-on échanger les « et » et les « ou » ? Obtient-on une propriété similaire à (b) ?

Exercice 7. — Pour trois assertions mathématiques P, Q et R, donner la table de vérité de :

(a) non-(P et Q et R) (préciser les parenthèses si besoin)
(b) non-(P ou Q ou R) (préciser les parenthèses si besoin)
(c) non-((P ou Q) et R)
(d) (($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow R$)) $\Rightarrow$ ($P \Rightarrow R$)
(e) non-(P et (non-P))

Exercice 8. — Pour quatre assertions P, Q, R et S, montrer l'équivalence :

$$((P \text{ ou } Q) \text{ et } (R \text{ ou } S)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } R) \text{ ou } (P \text{ et } S) \text{ ou } (Q \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } S)).$$

Quel rapport avec le système d'équations suivant, portant sur des réels x et y : $\begin{cases}(x-1)(y-2) & = 0\\ (x-2)(y-3) & = 0.\end{cases}$

Exercice 9. — Soit un système linéaire de la forme $MX = Y$ où M est une matrice et X et Y des vecteurs-colonne (de tailles adéquates). Ecrire avec des quantificateurs les trois assertions suivantes, puis leurs négations, puis retranscrire ces dernières en des phrases en français.
(a) « Le système a une infinité de solutions ».
(b) « Le système a une unique solution ».
(c) « Pour toute valeur de Y, le système n'a jamais une et une seule solution ».

Exercice 10. — Pour une famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ fixée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$, écrire sous forme formalisée la deuxième partie de l'équivalence suivante : « la famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si on peut écrire tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ de manière unique comme une combinaison linéaire des $\vec{v}_i$ ». Donner ensuite la négation de cette deuxième partie de l'équivalence.

Exercice 11. — On considère un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^{33}$, et on veut prouver que sa dimension n'est pas égale à 7. Enoncer la définition de la dimension d'un (sous-)espace vectoriel. Au vu de cette définition, qu'allez-vous tenter de démontrer exactement ?

Exercice 12. — On considère une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de vecteurs et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la définition (formalisée) de l'espace vectoriel engendré par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$? Ecrire sous forme formalisée la phrase suivante : « le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant la famille de vecteurs est F ».

Exercice 13. — Enoncer la négation de chacune des assertions suivantes (on pourra ajouter des parenthèses bien choisies le cas échéant). Sont-elles vraies ou fausses ?
(a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^3$;
(b) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^3$;
(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0$;
(d) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 0$.

Exercice 14. — Pour une famille supposée fixée de vecteurs $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), laquelle(lesquelles) des trois assertions suivantes affirme(nt) que la famille de vecteurs est libre ? Comment écrit-on de façon formalisée que la famille est liée ?
(a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$.
(b) $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0$.
(c) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0)$.

Annexe : quelques rappels sur les manipulations ensemblistes

Les définitions et propriétés suivantes font partie du bagage de base de tout (apprenti) mathématicien et doivent donc être parfaitement maitrisées. *(N.B.* les étudiants suivant l'UE GLIN201 « Fondements de l'informatique » seront amenés au cours de cette UE-là à reprendre plus en détail ce vocabulaire, dans un contexte plus tourné vers l'informatique ; nous nous contentons de répéter rapidement ici les principes qui servent de base à l'ensemble de l'édifice commun à partir duquel d'une part s'est développé le foisonnement des mathématiques et d'autre part s'est créée l'informatique théorique avant de se constituer en discipline autonome.)

Les ensembles considérés en mathématiques sont constitués d'éléments. Lorsqu'un élément x **appartient à un ensemble** E, on note : $x \in E$. Si x n'appartient pas à E, on note : $x \notin E$. L'**ensemble vide** est un ensemble qui n'a aucun élément ; il est noté $\emptyset$. Lorsqu'un ensemble F **est contenu dans un ensemble** E, on note : $F \subset E$. *Les notations* $\in$ *et* $\subset$*, tout comme le vocabulaire associé, ne doivent pas être confondues !*

Un ensemble qui est contenu dans un autre ensemble est souvent appelé **partie** de ce dernier ensemble. L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$. On remarquera que l'ensemble vide est contenu dans n'importe quel ensemble, donc $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ pour tout ensemble E.

Pour définir un ensemble, on peut soit donner la liste de ses éléments encadrée par des accolades (on dit que l'ensemble est défini *en extension*), par exemple

$$E = \{1, 3, 6, 98, \pi, e^2 - 27\},$$

soit le définir par une propriété caractéristique (auquel cas on dira qu'il est défini *en compréhension*). La notation usuelle est

$$F = \{x \in E \mid P(x)\},$$

où $P(x)$ est une assertion (mathématique) portant sur une variable x. L'ensemble F décrit de cette façon est alors composé exactement des éléments x de E qui vérifient la propriété $P(x)$. Il est important de noter qu'un ensemble décrit en compréhension toujours défini *comme une partie d'un ensemble déjà connu*. Ainsi, il peut arriver que des éléments d'un troisième ensemble G vérifient la propriété $P(x)$, mais si ceux-ci ne sont pas par ailleurs des éléments de E alors ils ne sont pas dans F.

Exemple. — Soit $F = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \geq 3\}$. Ici la propriété caractéristique est $P(x)$ = « $x^2 \geq 3$ » . Alors $F = [\sqrt{3}, +\infty[$; on note que pour $y = -5$, $P(y)$ est vérifiée mais y n'est pas un élément de F car F a été défini comme une partie de $\mathbb{R}_+$ (les réels positifs).

Proposition. — *Soit E et F deux ensembles. Alors F est contenu dans E si et seulement si tout élément de F appartient à E. Autrement dit :* $F \subset E \iff \forall x \in F,\ x \in E$.

Proposition. — *Soit E et F deux ensembles. Alors F est égal à E si et seulement si F est contenu dans E et E est contenu dans F. Autrement dit :* $F = E \iff E \subset F$ *et* $F \subset E$.

En conséquence, pour montrer que F est contenu dans E il faut montrer que tous les éléments de F appartiennent à E, et pour montrer que deux ensembles sont égaux il faut montrer que tous les éléments du premier appartiennent au second et que tous les éléments du second appartiennent au premier.

L'**intersection** de deux ensembles E et F, notée $E \cap F$, est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans E et dans F. Ainsi,

$$x \in E \cap F \iff x \in E \text{ et } x \in F.$$

La **réunion** de deux ensembles E et F, notée $E \cup F$, est l'ensemble des éléments qui sont dans E ou dans F. Ainsi,

$$x \in E \cup F \iff x \in E \text{ ou } x \in F.$$

Ces deux écritures formalisées donnent également un principe pour démontrer qu'un certain élément x est dans l'intersection ou la réunion de E et de F.

La notation $E \setminus F$ est utilisée pour désigner l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F. Ainsi,

$$E \setminus F = \{x \in E \mid x \notin F\}.$$

Pour utiliser cette notion, il n'est pas nécessaire que F soit contenu dans E (*cf.* plus haut : l'ensemble $E \setminus F$ est défini par la propriété caractéristique $x \notin F$, qui a un sens pour n'importe quel élément x... mais comme il s'agit des éléments de E qui vérifient cette propriété, $E \setminus F$ est une partie de E). Le **complémentaire d'un ensemble** A **dans un ensemble** E est en revanche une notion qui n'a de sens que s'il a été préalablement vérifié que A est une partie de E. Il est alors noté $\complement_E A$ (on trouve parfois $\overline{A}^E$) et défini comme suit

$$\complement_E A = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

La maitrise du vocabulaire sur les applications et les fonctions est également impérative. Une **application** est définie par

- un **ensemble de départ** (ou **ensemble de définition**, ou encore **source**) E,
- un **ensemble d'arrivée** (ou encore **but**) F,
- et une « recette » (on dit parfois aussi « relation fonctionnelle »), qui n'est pas nécessairement donnée par une formule explicite, permettant d'associer à tout élément de E un élément de F.

La notation usuelle est

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Le mot **fonction** est parfois utilisé comme synonyme d'application, mais il est plus fréquemment employé dans un contexte un peu plus large. Ainsi, une fonction de E dans F désignera le plus souvent une application définie sur une partie A de E (appelée **domaine de définition** de la fonction) et à valeurs dans F. Le domaine de définition de la fonction est alors en général la plus grande partie de E sur laquelle la relation fonctionnelle donnée garde un sens.

L'**image d'un élément** x **de l'ensemble** E **de départ** est l'élément $f(x)$ de l'ensemble d'arrivée F. L'**image de la fonction** f, souvent notée $f(E)$, est la partie de l'ensemble d'arrivée F formée des éléments qui sont effectivement images d'un élément de E (on dit aussi « atteints par f »). Autrement dit

$$f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

On peut également définir **l'image d'une partie** A de E comme suit :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Définition. — *Les trois notions suivantes sont fondamentales.*

1. *Une fonction est* ***injective*** *si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

2. *Une fonction est* ***surjective*** *si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall z \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } z = f(x).$$

3. *Une fonction est* ***bijective*** *si elle est injective et surjective.*

Il est clair que l'injectivité et la surjectivité éventuelle d'une fonction dépendent fortement des ensembles de départ et d'arrivée, d'où l'importance de les avoir identifiés avec précision.

Exemple. — Soit E un ensemble, A une partie de E et $\mathbb{I}_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} \mathbb{I}_A(x) = 1 & \text{si } x \in A, \\ \mathbb{I}_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Cette fonction est appelée « fonction caractéristique de la partie A ». Cette fonction est surjective si et seulement si A est non-vide et $\complement_E A$ est non-vide. Elle est injective si et seulement si A a au plus un élément et $\complement_E A$ a au plus un élément. Elle est donc bijective si et seulement si E a exactement deux éléments et que A est une partie de E contenant exactement un élément.

Si F est une partie de l'ensemble de définition d'une fonction f, la **restriction** de f à F (souvent notée f_F ou $f_{|F}$) est une nouvelle fonction, dont l'ensemble de départ est F, l'ensemble d'arrivée est inchangé, et qui à tout élément x de F associe toujours $f(x)$. Enfin, l'opération de composition entre fonctions est définie comme suit : si E, F, G et H sont quatre ensembles et $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions, alors la **composition**, notée $g \circ f$, est définie par les éléments suivants :
- son ensemble de définition est $J = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ (où D_h désigne l'ensemble de définition d'une fonction h) ;
- son ensemble d'arrivée est H ;
- pour tout élément x de J, on pose $g \circ f(x) = g(f(x))$.

On notera que l'ensemble de définition J peut très bien être vide. Dans ce cas la composée n'existe pas ! Par ailleurs, les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$, si elles existent, n'ont en général rien à voir.

Exercices. —

Exercice 15. — Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice 16. — Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$\complement_E A \cap \complement_E B = \complement_E (A \cup B) \text{ et que } \complement_E A \cup \complement_E B = \complement_E (A \cap B).$$

Exercice 17. — Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(faire un dessin). Montrer que

$$A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A, \quad A \Delta B = B \Delta A, \quad (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C), \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Exercice 18. — Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

1. Montrer : $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective. Que dire des implications réciproques ?
2. Montrer : $g \circ f$ injective $\Leftrightarrow$ f injective et $g_{|f(E)}$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Leftrightarrow$ $g_{|f(E)}$ surjective.

Exercice 19. — Si $f : E3 \to F$ est une application et Y une partie de F, on définit l'**image réciproque** de Y comme

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}$$

et on rappelle que si X est une partie de$E$, l'**image** $f(X)$ de X a été définie plus haut. Montrer les propriétés suivantes, pour toutes parties A_1, A_2 de E et B_1, B_2 de F,

1. si $A_1 \subset A_2$, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$;
2. si $B_1 \subset B_2$, alors $f^{-1A}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
4. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ (montrer par un exemple que l'on n'a pas forcément égalité) ;
5. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
7. pour tout $B \subset F$, $B \subset f^{-1}(f(B))$ (montrer par un exemple que l'on n'a pas forcément égalité) ;
8. pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

Exercice 20. — Avec les notations de l'exercice précédent, montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. f est surjective ;
2. pour tout $y \in F$, $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$;
3. pour tout $Y \subset F$, $f(f^{-1}(Y)) = Y$;
4. la seule partie Y de F telle que $f^{-1}(Y) = \emptyset$ est $\emptyset$.

Essayer de mettre en évidence des propriétés analogues en remplaçant la surjectivité par l'injectivité.

Exercice 21. — Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe sa fonction caractéristique, notée ici f_A (*cf.* plus haut). Prouver les propriétés suivantes :

(i) Si X et Y sont des parties de E, $X \subset Y$ est équivalent à $f_X \leq f_Y$;
(ii) Si X et Y sont des parties de E, $X = Y$ est équivalent à $f_X = f_Y$;
(iii) Si X est une partie de E, $f_{E \setminus X} = 1 - f_X$;
(iv) Si X et Y sont des parties de E, $f_{X \cap Y} = f_X f_Y$ et $f_{X \cup Y} = f_X + f_Y - f_X f_Y$.

Exercice 22. — Soient A et B deux parties d'un ensemble E. A quelle condition existe-t-il une partie X de E telle que $A \cap X = B$? Si oui, décrire toutes les solutions.

Exercice 23. — Même question que dans l'exercice précédent avec l'équation $A \cup X = B$.

Exercice (⋆) 24. — Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. *Indication* : on pourra supposer l'existence d'une telle surjection φ et faire intervenir l'ensemble $X = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ (prendre le temps de bien comprendre cette définition !)

CHAPITRE 1

UN RAPIDE PANORAMA DES ENSEMBLES DE NOMBRES

L'objectif de ce chapitre est de reprendre un certain nombre de connaissances connues sur les ensembles de nombres que l'on rencontre le plus souvent en mathématiques (à l'exception de l'ensemble des nombres complexes qui a été revu au premier semestre). Nous en profiterons pour insister (plus qu'il n'a pu etre fait dans l'enseignement secondaire) sur la *construction* et les propriétés *structurelles* de ces ensembles. A la fin du chapitre, nous serons en mesure de souligner les réelles difficultés auxquelles on doit faire face si on souhaite donner une définition précise de l'ensemble des nombres réels (qui fera l'objet du chapitre suivant).

1.1. Entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est celui des ensembles de nombres que notre cerveau humain conçoit depuis le plus longtemps. A l'exception de quelques peuplades isolées[(1)], tout être humain possède (et ce très tôt dans son existence) une conscience claire de la suite numérique et des principes élémentaires du dénombrement. A l'opposé de cette compréhension intuitive, la tâche consistant à définir proprement ce qu'est l'ensemble des entiers naturels est ardue, et ce parce qu'elle touche aux fondements des mathématiques (ce qui, comme nous l'avons entraperçu au chapitre précédent, n'est pas forcément une mince affaire). Des constructions issues de la seule théorie des ensembles ont été proposées à la fin du XIXe siècle. Nous allons en décrire rapidement une due au mathématicien John Von Neumann (1903–1957) en 1923, sans entrer dans les détails. Elle consiste à partir de l'ensemble vide et à poser les notations suivantes pour certains ensembles bien particuliers :

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}...$$

Autrement dit 0 est l'ensemble vide, 1 est l'ensemble à un seul élement (qui est l'ensemble vide), 2 est l'ensemble à deux éléments formé de l'ensemble vide et de l'ensemble que nous venons d'appeler 1, 3 est l'ensemble (à trois éléments) dont les éléments sont les ensembles 0, 1 et 2 préalablement définis, etc. (Exercice : qu'est-ce que 4 ?)

Cette définition est évidemment très formelle, mais elle aura au moins le mérite de convaincre le lecteur qu'elle ne fait bien intervenir que le langage ensembliste.

[(1)]Le lecteur intéressé pourra se reporter aux amusants premiers chapitres du livre de vulgarisation d'Alex Bellos, *Alex au pays des chiffres : une plongée dans l'univers des mathématiques*, paru aux éditions Robert Laffont en 2011, pour quelques indications sur ce point.

► Même présentée sous cette forme, la construction de l'ensemble des entiers naturels n'est pas entièrement satisfaisante, et ce pour au moins deux raisons. En premier lieu, et bien que ce ne soit pas apparent, elle repose encore sur des actes de foi (en mathématiques, science éminément rationaliste, on parle plutôt d'axiomes). En effet, il n'est absolument pas évident que les nombres entiers ainsi définis forment bien un ensemble. La raison est assez subtile et une façon de la comprendre peut s'énoncer ainsi : la construction décrite à l'instant est une construction *par récurrence* des entiers. Or, pour utiliser la notion de récurrence, il nous faut déjà avoir une connaissance intuitive des entiers... En réalité on peut donner un sens à la démarche décrite plus haut en évitant le recours aux entiers, mais cette construction nécessite quand même de postuler quelques axiomes, parmi lesquels on trouve l'existence d'au moins un ensemble infini, plus quelques autres que nous ne décrirons pas mais qui sont plutôt plus banals (au sens où ils formalisent des propriétés qu'il est raisonnable de voir apparaitre dans la théorie des ensembles). En second lieu, toute tentative de construction rigoureuse des entiers ne peut faire intervenir qu'un nombre *fini* de propriétés. Mais nous possédons par ailleurs une vision intuitive (on dira aussi *naïve*) des entiers qui est bien plus riche que celle à laquelle peut conduire une construction finie. Toute construction rigoureuse de ces derniers passe donc à côté de certaines propriétés des « entiers intuitifs ». La construction que nous avons esquissée permet de reproduire l'essentiel des propriétés usuelles de l'ensemble $\mathbb{N}$, ce qui est déjà beaucoup et permet d'obtenir l'essentiel des mathématiques. Mais, comme nous le verrons plus loin, il peut exister des propriétés qui échappent à cette définition formelle.

Ces commentaires sont naturellement subtils. Sans chercher à les comprendre vraiment en détails, le lecteur pourra au moins retenir qu'une construction de $\mathbb{N}$ ne peut être entièrement satisfaisante. ◄

1.1.1. Propriétés de base. — Les premières propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels se déduisent facilement de cette construction. Listons-en cinq qui sont à la base de toute l'arithmétique :

1. Tout entier naturel n possède un **successeur** que nous noterons encore pendant quelques lignes $s(n)$ (notation que nous abandonnerons bientôt au profit d'un $n+1$ classique et de bon goût).
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ est **totalement ordonné**, c'est-à-dire que l'on peut toujours comparer entre eux deux nombres entiers.
3. Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ possède un **plus petit élément**, c'est-à-dire que dans toute partie A de $\mathbb{N}$ il existe $a \in A$ tel que $a < x$ pour tout x de A différent de a.
4. Toute partie non-vide et **majorée** de $\mathbb{N}$ possède un **plus grand élément**, c'est-à-dire que dans toute partie non-vide et majorée B de $\mathbb{N}$ il existe $b \in B$ tel que $b > y$ pour tout y de B différent de b.
5. Pour tout entier n, le successeur de n est le plus petit élément de l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid p > n\}$.

Remarque 1.1.1. — Profitons de ces propriétés pour rappeler quelques éléments importants de vocabulaire, énoncés ici pour les parties de $\mathbb{N}$ mais qui s'étendent évidemment à toutes les situations où l'on dispose d'un ordre total, c'est-à-dire d'une façon de comparer n'importe quel couple d'éléments d'un ensemble. Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

1. On dit que A est **majorée** s'il existe un élement M de $\mathbb{N}$ tel que $a \leq M$ pour tout a de A.
2. Un élément M de $\mathbb{N}$ tel que $a \leq M$ pour tout a de A s'appelle un **majorant** de A.
3. Un **plus grand élément** de A est un minorant de A qui est dans A.
4. On dit que A est **minorée** s'il existe un élement m de $\mathbb{N}$ tel que $a \geq m$ pour tout a de A.
5. Un élément m de $\mathbb{N}$ tel que $a \geq m$ pour tout a de A s'appelle un **minorant** de A.
6. Un **plus petit élément** de A est un minorant de A qui est dans A.

L'ensemble de ces définitions doit être parfaitement bien compris... et elles ne doivent surtout pas être mélangées !

► Toutes les propriétés énoncées plus haut se déduisent de la théorie des ensembles et de la définition formelle des entiers. Ainsi la définition du successeur est $s(n) = n \cup \{n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On décide ensuite que l'assertion « $m \leq n$ » signifie « $m \in n$ ou $m = n$ », ce qui dote $\mathbb{N}$ de ce que l'on appelle une relation d'ordre. Le plus petit élément d'une partie A non vide de $\mathbb{N}$ est l'ensemble $a = \cap_{x \in A} x$. Enfin, dire qu'une partie non-vide B est majorée signifie qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in m$, pour tout $x \in B$, et le plus grand élément de B est simplement $b = \cup_{x \in B} x$. Bien sûr, dans les deux derniers cas il faut s'assurer que le plus petit et le plus grand élément sont bien des éléments de $\mathbb{N}$. ◄

Parmi les conséquences les plus immédiates, on trouve le fait que $\mathbb{N}$ lui-même possède un plus petit élément, qui est bien évidement 0. Plus intéressant, il est possible (et même souhaitable) de construire l'addition à l'aide d'applications successives de l'opération successeur. Nous nous contenterons ici de donner quelques idées : ainsi, si l'on décide que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n + 0 = n \text{ et } n + 1 = s(n),$$

alors il est raisonnable de poser

$$n + 2 = (n + 1) + 1 = s(s(n)), \quad n + 3 = ((n + 1) + 1) + 1 = s(s(s(n))), \quad \text{etc.}$$

Un peu d'imaginaton montre alors que l'on peut définir l'addition des entiers. Attention néanmoins, avec cette construction il n'est par exemple pas évident que $m + n = n + m$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}$, ce point, comme d'autres, nécessite donc une démonstration. La multiplication n'est pas beaucoup plus difficile, par exemple en posant

$$0 \times n = 0, \quad 1 \times n = n, \quad 2 \times n = n + n, \quad \text{etc.}$$

De nouveau, les propriétés classiques de la multiplication (commutativité, associativité) et leurs liens soit entre elles (distributivité de la multiplication sur l'addition) ou avec l'ordre (par exemple la propriété classique « $\forall(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4, (a \geq c \text{ et } b \geq d) \Rightarrow a+b \geq c+d$ ») doivent faire l'objet d'une démonstration.

1.1.2. Démonstrations par récurrence. — L'ingrédient essentiel aussi bien des constructions des opérations que des preuves afférentes (et de nombreux autres raisonnements mathématiques) est la

***Proposition 1.1.2* (principe de récurrence)**. — *Soit A une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

$$(i)\ 0 \in A\,; \qquad (ii)\ \forall n \in A, n + 1 \in A.$$

Alors $A = \mathbb{N}$.

► Sans être excessivement difficile, la démonstration est un peu technique. On note B le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$; le but est donc de prouver que $B = \emptyset$. On raisonne alors par l'absurde. Supposons que B soit non-vide. D'après les propriétés énoncées au début, il existe alors un plus petit élément b de B. Comme nous savons que 0 est dans A, on a nécessairement $b > 0$. La suite de la preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.1.3. — *Tout élément de $\mathbb{N}$ distinct de* 0 *possède un prédécesseur : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $s(m) = n$.*

Preuve du lemme. — Soit n dans $\mathbb{N}$ distinct de 0. Alors l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid p < n\}$ est non-vide (car il contient 0) et est majoré par n. Il a donc un plus grand élément que nous allons appeler m. Par nature on a $m < n$ et de plus $m+1$ n'est pas dans $\{p \in \mathbb{N} \mid p < n\}$, donc $m+1 \geq n$. Par ailleurs, n est un élément de l'ensemble $\{q \in \mathbb{N} \mid q > m\}$ dont $m + 1$ est le plus petit élément, donc $m + 1 \leq n$. Conclusion : $m + 1 = n$. □

Revenons maintenant à la preuve du principe de récurrence. Nous avons appelé b le plus petit élément de B et nous savons qu'il est distinct de 0. Il a donc un prédécesseur c, qui est nécessairement

hors de B c'est-à-dire dans A. Mais si c est dans A, alors $c+1=b$ est aussi dans A, ce qui est la contradiction cherchée ! □

Il existe de multiples raffinements du principe de récurrence, qui permettent de justifier les démonstrations par récurrence dont l'amorce (on dit aussi l'initialisation) se situe à un cran différent de 0, par exemple à $n=1$, etc. Elles se ramènent toutes à la précédente. Par exemple, le lecteur pourra s'amuser à démontrer, en utilisant les mêmes arguments, que si C est une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant les deux propriétés : C est non-vide et $\forall n \in C, n+1 \in C$, alors C est égal à $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ pour un certain m dans $\mathbb{N}$. ◀

Exercices. —

Exercice 1.1.4. — Soit A une partie de $\mathbb{N}$, non-vide, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in A$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, n_0\}$.

Exercice 1.1.5. — Calculer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n} i$.

Exercice 1.1.6. — Montrer que le chiffre des unités de toute puissance non-nulle de 6 est un 6.

Exercice 1.1.7. — Dans une cité dont les habitants sont d'excellents logiciens 40 hommes trompent leur femme (on suppose que le régime matrimonial est la monogamie). De plus, les femmes sont au courant de l'infidélité de tous les hommes de la ville sauf de leur mari. Le maire de la ville décide de mettre fin à cette situation insupportable et publie un édit tenant en deux articles :

1. Il y a au moins un homme adultère dans la ville.
2. Toute femme qui aura acquis un jour la certitude que son mari la trompe devra le mettre à mort le lendemain au petit jour.

Que se passa-t-il quelques temps après la publication de cet édit[2] ?

Exercice 1.1.8. — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 25 divise $6^n + 20n + 24$ (on pourra procéder par récurrence ou utiliser la formule du binôme).

Exercice 1.1.9. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $(u_n)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} (u_k)^2\right)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2^{(n-1)/2}$.

Exercice 1.1.10. — On définit, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leq n$ et $\binom{n}{p} = 0$ sinon.

a. Montrer que $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b. Que vaut $\binom{n}{0}$? Montrer que $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 1.1.11. — Soit $a \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer par récurrence que 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$ si a est impair.

b. Montrer par récurrence que $a^{2^n} - 1 = (a-1)\prod_{k=0}^{n-1}(a^{2^{k-1}} + 1)$ puis retrouver le **a**.

Exercice 1.1.12. — Soit P_n le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$. Montrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) > 0$.

Exercice 1.1.13. — Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = x^{n-1} f(\frac{1}{x})$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}(\frac{1}{x}).$$

[2] Il s'agit d'une vieille légende que nous nous contentons de rapporter sans émettre de jugement moral !

1.2. Entiers relatifs

Le passage aux entiers relatifs est la première étape des constructions qui vont nous emmener jusqu'aux réels. Contrairement aux entiers naturels dont la plupart des humains possèdent une connaissance intuitive, le concept d'entier relatif, et plus précisément de nombre négatif, est le fruit d'une véritable processus mathématique. Dans notre société, les nombres négatifs sont introduits dès l'école élémentaire : ils semblent donc n'offrir plus de mystère pour personne. Il est néanmoins instructif de savoir que leurs premiers utilisateurs systématiques se sont heurtés à une franche opposition jusqu'à la fin du XVIIe siècle, les nombres négatifs étant accusés d'exercer une influence néfaste sur la morale de part leur utilisation dans les mécanismes bancaires (calcul de taux d'intérêts et de dettes notamment). Nous avons heureusement (pour les mathématiques) largement dépassé ces querelles aujourd'hui, mais dans l'optique qui est la nôtre, réfléchir à leur construction rigoureuse n'est pas dépourvu d'intérêt.

1.2.1. Une construction. — Une manière naïve de procéder à la définition des entiers relatifs serait de produire une copie des entiers naturels non-nuls, que nous appellerions évidemment $-\mathbb{N}^*$ et de décider que l'on nomme $\mathbb{Z}$ l'ensemble $\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}^*)$. Cette approche est maladroite, car elle oblige à traiter par la suite de manière différenciée les nombres positifs et les nombres négatifs. Nous proposons ici la construction traditionnelle de l'ensemble des entiers relatifs, au sens où on la trouve dans tous les bons livres de mathématiques (et même les mauvais) de premier cycle universitaire. Quoiqu'un peu moins intuitive que l'approche naïve, elle présente l'intérêt de bien préparer le terrain pour la construction des nombres rationnels qui va suivre.

Elle trouve son origine dans la limitation que constitue l'absence d'une soustraction au sein des entiers naturels (« on ne peut pas soustraire 7 à 5 en restant dans $\mathbb{N}$ »). L'idée est alors d'enrichir $\mathbb{N}$ en lui ajoutant tous les résultats (pour l'instant purement virtuels) de ces soustractions impossibles. Autrement dit, on définit un ensemble de « nombres » de la forme « $a-b$ » où a et b parcourent l'ensemble des entiers naturels (pour l'instant, le signe « $-$ » n'est pas autre chose qu'une simple *notation*). En procédant ainsi, on retrouve tous les entiers naturels (par exemple 1 est $1-0$...) et on en crée de nouveaux, les futurs entiers négatifs. Evidemment, nous savons bien que deux soustractions très différentes peuvent donner le même résultat : il faut donc disposer en plus d'un critère permettant de décider que deux nombres « $a-b$ » et « $c-d$ » sont égaux.

On commence donc par considérer l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et on décrète que deux éléments (a, b) et (c, d) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont *équivalents* si

$$a + d = b + c$$

(noter que, si la soustraction avait un sens dans les entiers naturels, cela reviendrait à $a - b = c - d$). Par simplicité, nous noterons $(a, b) \sim (c, d)$ si les couples (a, b) et (c, d) sont équivalents. On définit alors pour chaque élément (a, b) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ce que l'on appelle sa *classe*, c'est-à-dire l'ensemble des couples d'entiers naturels qui lui sont équivalents(3) :

$$\mathcal{C}(a, b) = \{(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + d = b + c\}.$$

Nous avons alors presque fini de définir les entiers relatifs. En effet, comme nous avons une connaissance intuitive de ces derniers, nous pouvons tout de suite remarquer que chaque ensemble $\mathcal{C}(a, b)$ a exactement les propriétés que nous attendons d'un entier relatif : nous pouvons de fait penser l'ensemble $\mathcal{C}(a, b)$ comme le résultat de la « soustraction $a - b$ », qui est le même que le résultat de la « soustraction $c - d$ » si $a + d = b + c$.

(3)Pour les étudiants savants : nous sommes bien sûr ici en train de définir une relation d'équivalence et l'ensemble $\mathbb{Z}$ apparaitra comme l'ensemble de toutes les classes d'équivalence, c'est-à-dire le quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par la relation d'équivalence

Définition 1.2.1. — Un **entier relatif** est une classe de couples d'entiers naturels, autrement dit un $\mathcal{C}(a, b)$ pour $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On définit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs comme l'ensemble formé par toutes les classes de la forme $\mathcal{C}(a, b)$ où (a, b) parcourt les couples d'entiers naturels.

La complexité de cette définition provient bien sûr du fait que nous définissons un entier naturel comme un ensemble. Chaque entier relatif peut donc **se représenter** par un couple d'entiers naturels[(4)] mais il y a une infinité de façons différentes de représenter ainsi un même entier relatif. Nous avons donc décidé (et cela nécessite, il est vrai, un petit effort intellectuel) d'identifier un entier relatif à un ensemble : *l'ensemble des tous ses représentants possibles*. Par suite, l'ensemble $\mathbb{Z}$ est un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles.

Le lien avec la représentation « usuelle » des entiers relatifs est vite fait : il suffit de remarquer que parmi tous ses représentants possibles, un entier relatif en a forcément un de la forme $(m, 0)$ ou bien un de la forme $(0, n)$ et que l'un exclut l'autre sauf si l'entier relatif considéré est $\mathcal{C}(0, 0)$. Les premiers sont les entiers relatifs **positifs** (nous continuerons à noter $\mathbb{N}$ la partie de $\mathbb{Z}$ constituée des entiers positifs), et nous décidons d'appeler les autres entiers naturels **négatifs**.

► Prouvons ce dernier fait. Soit (a, b) un représentant d'un entier relatif. Alors on a soit $a < b$, soit $b < a$, soit $a = b$. Prenons maintenant (c, d) un autre représentant du même entier relatif. Si de plus $a < b$, alors $a + d = b + c > a + c$, donc $a + d > a + c$ ce qui implique $c < d$. Autrement dit, on a une inégalité *dans le même sens* pour tous les représentants d'un même entier relatif (une preuve très similaire vaut aussi dans le cas $a > b$ et dans le cas $a = b$). On peut alors partager les éléments de $\mathbb{Z}$ en trois catégories :

- ceux qui sont représentés par des (a, b) avec $a > b$, ce sont les entiers strictement positifs et un représentant possible est évidemment de la forme $(m, 0)$;
- ceux qui sont représentés par des (a, b) avec $a < b$, ce sont les entiers strictement négatifs et un représentant possible est évidemment de la forme $(0, n)$;
- et celui qui est représenté par les (a, a), donc par $(0, 0)$ et qui est l'élément nul de $\mathbb{Z}$.

Nous avons donc bien démontré le résultat souhaité. ◄

Exercice 1.2.2. — Montrer que l'application qui à tout entier naturel m associe $\mathcal{C}(m, 0)$ est une application injective et non surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons abandonner sous peu ces notations éminemment lourdes et décréter que nous noterons désormais (comme le veut l'usage) m l'entier relatif représenté par $(m, 0)$ (avec $m \in \mathbb{N}$) et $-n$ l'entier relatif représenté par $(0, n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Nous prions cependant le lecteur de conserver ces notations encore quelques instants. Elles se trouvent en effet justifiées lorsqu'il s'agit de définir proprement les opérations.

1.2.2. Addition, multiplication. — Les constructions que nous allons faire ici ont un intérêt purement théorique : il s'agit de montrer que nous sommes capables de définir proprement les opérations sur les entiers relatifs en respectant le souci de rigueur énoncé au début de ce chapitre. Que les étudiants ne se méprennent donc pas : il ne sera bien évidemment pas question de remplacer l'usage intuitif qu'ils ont des entiers relatifs par l'écriture lourde que nous avons introduite depuis quelques pages. L'objectif est plutôt de mettre en évidence un *modèle de construction de nouveaux objets mathématiques*, qui servira de guide pour des situations futures plus compliquées (typiquement : les nombres réels). Il s'agit donc d'un jeu intellectuel, que, nous l'espérons, les étudiants trouveront amusant, et qui est loin d'être gratuit. Accepter d'y jouer appporte une réelle compréhension des mécanismes en jeu dans les mathématiques.

(4) Comprendre : on peut écrire tout entier relatif comme la différence de deux entiers naturels.

Revenons maintenant à l'addition. On commence par la définir en premier lieu sur les couples d'entiers naturels. Comme on s'y attend, il suffit de poser

$$\forall (a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{N}^4, \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Avant de passer aux entiers relatifs, une vérification s'impose néanmoins : un entier relatif peut-être représenté de très nombreuses manières par un couple d'entier naturels. Il faut donc s'assurer que si on additionne des couples d'entiers naturels représentant *les mêmes entiers relatifs*, l'addition donne toujours le même résultat. Dit autrement, si $(a_1, b_1) \sim (c_1, d_1)$ et $(a_2, b_2) \sim (c_2, d_2)$, alors $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)$ doit être équivalent à $(c_1, d_1) + (c_2, d_2)$. Or

$$(a_1 + a_2) + (d_1 + d_2) = (a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) = (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2).$$

Conclusion : on a bien $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \sim (c_1 + c_2, d_1 + d_2)$. Les résultats suivants se démontrent aisément (quoique ce soit parfois un peu fastidieux).

Proposition 1.2.3. — *L'addition dans $\mathbb{Z}$ que nous venons de définir est associative et commutative. Elle étend l'addition des entiers naturels, au sens où la somme deux entiers naturels est la même qu'on la voie dans $\mathbb{N}$ ou qu'on ait plongé $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. L'élément 0 de $\mathbb{Z}$ est un élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire que $z+0 = z$ pour tout z dans$\mathbb{Z}$, et chaque élémént z de $\mathbb{Z}$ possède un inverse, c'est-à-dire qu'il existe un autre entier relatif z' tel que $z+z' = 0$. En particulier si $m \in \mathbb{N}^*$, l'inverse de m est $-m$ (et l'inverse de 0 est 0) ; cela justifie donc de noter en général $-z$ l'inverse de l'entier relatif z.*

Remarque 1.2.4. — Attention, ici on a appellé *inverse* d'un élément z pour une certaine opération un élément z' tel que lorsqu'on effectue l'opération de z avec z' on trouve l'élément neutre de l'opération. Donc un inverse pour l'addition est un élement z' tel que $z + z' = 0$ (ce qu'on appelle d'habitude un *opposé* dans le langage courant), alors qu'un inverse pour la multiplication est un z' tel que $zz' = 1$ (qu'on appelle effectivement inverse dans le langage courant).

L'existence de l'inverse de toute entier relatif permet de définir la **soustraction** comme suit :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2).$$

L'existence de la soustraction permet alors de définir l'**ordre** des éléments de $\mathbb{Z}$.

Définition 1.2.5. — Soient z, z' deux entiers relatifs. On dit que $z \geq z'$ si et seulement si $z - z'$ est positif.

Exercice 1.2.6. — Montrer que l'addition et l'ordre sont compatibles, c'est-à-dire : $\forall (z_1, z_2, z'_1, z'_2) \in \mathbb{Z}^2$, si $z_1 \geq z'_1$ et $z_2 \geq z'_2$ alors $z_1 + z_2 \geq z'_1 + z'_2$.

Exercice 1.2.7. — Montrer que l'on peut définir de la même manière une **multiplication** dans $\mathbb{Z}$ qui est associative, commutative et distributive par rapport à l'addition. Si $z \in \mathbb{Z}$, on appelle *inverse* de z pour la multiplication un entier relatif z' tel que $zz' = 1$; montrer que seul 1 possède un inverse dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1.2.8. — Montrer que, $\forall (z_1, z_2, z'_1, z'_2) \in \mathbb{Z}^2$, si $z_1 \geq z'_1$ et $z_2 \geq z'_2$ alors $z_1 z_2$ n'est pas forcément supérieur ou égal à $z'_1 z'_2$. Comment corriger cet énoncé ?

1.3. Un rapide tour au pays de l'arithmétique

Nous avons désormais défini de manière totalement satisfaisante l'ensemble des nombres relatifs[5]. L'arithmétique peut alors entrer en scène. Le coeur de ce domaine est la notion de divisibilité : on dit que l'entier relatif a **divise** l'entier relatif b s'il existe un entier relatif c tel que $ac = b$ (attention à l'ordre). On dit alors que a est un diviseur de b. Rappelons (sans en donner les détails) que l'on peut à partir de cela définir le PGCD de deux entiers relatifs non-nuls (attention, il faut le choisir positif pour qu'il soit défini sans ambiguïté) et la notion d'entiers *premiers entre eux*, c'est-à-dire dont le PGCD est égal à 1. Ces notions ont été en général amplement étudiée dans le secondaire et nous supposerons donc connus les résultats suivants, qui seront replacés dans un cadre plus général en deuxième année.

Définition 1.3.1. — Un **nombre premier** est un entier naturel p différent de 0 et de 1 qui n'est divisible que par 1, -1, lui-même et son opposé.

***Théorème 1.3.2* (division euclidienne)**. — *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un* unique *couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que*

$$a = bq + r \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

Le nombre q est le **quotient** *de la division euclidienne de a par b et r est le* **reste**.

Les applications classiques de ce résultats sont l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD, le théorème de Bezout, ou encore les résultats fondamentaux suivants (dont nous nous servirons librement par la suite).

***Lemme 1.3.3* (Gauss)**. — *Soient a, b, c trois entiers relatifs non-nuls tels que a divise bc et soit premier avec c. Alors a divise b.*

***Théorème 1.3.4* (décomposition en facteurs premiers)**. — *Soit a un entier relatif. Alors il existe un entier naturel r, une famille finie $(p_1, \ldots, p_r)$ de nombres premiers, une famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ d'entiers naturels non-nuls et un entier $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. De plus, cette écriture est unique.*

***Lemme 1.3.5* (Euclide)**. — *Soit p un nombre premier et a et b deux entiers relatifs non-nuls premiers entre eux. Si p divise ab alors soit p divise a, soit p divise b.*

Exercice 1.3.6. — (N.B. les divisions dont il est question ici sont des divisions euclidiennes)

a. On divise un entier par 15, le reste est 3 ; quel peut-être le reste de la division par 5 ? Même question si le reste est 13.
b. On divise un entier par 5, le reste est 3 ; quel peut-être le reste de la division par 15 ?

---

[5]Le lecteur curieux remarquera que le passage des entiers naturels aux entiers relatifs ne présente pas de réelle difficulté : nous ne retrouvons pas ici les problèmes de définition que nous avons mentionné à titre culturel pour les entiers naturels. Si l'on accepte l'existence des entiers naturels, les entiers relatifs n'ont que peu de mystères.

1.4. Entre le fini et l'infini

La définition des nombres entiers permet de donner un sens au dénombrement des ensembles. L'idée fondamentale est la suivante.

Définition 1.4.1. — On dit que deux ensembles E et F ont le même **cardinal** (on dit aussi aussi qu'ils sont **équipotents**) si et seulement si il existe une bijection de E sur F. On dira également que E a un cardinal plus petit que (ou égal à) celui de F s'il existe une injection de E dans F et que E a un cardinal plus grand que (ou égal à) celui de F s'il existe une surjection de E sur F.

Définition 1.4.2. — Un ensemble non-vide E est infini si pour tout a dans E, $E \setminus \{a\}$ est en bijection avec E

► Ces définitions nécessitent une justification : nous admettrons les deux résultats suivants.

Lemme 1.4.3. — *Soient A et B deux ensembles. S'il existe une injection de A dans B, il existe une surjection de B sur A, et vice-versa.*

***Théorème 1.4.4* (Cantor-Bernstein-Schröder, 1896)**. — *Soient A et B deux ensembles. S'il existe deux applications* injectives $f : A \to B$ *et* $g : B \to A$*, alors A et B ont même cardinal.*

Ces résultats assurent au passage que les parties $\{1, \ldots, m\}$ et $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{N}$ (avec notre définition formelle des entiers comme des ensembles, on aurait pu se contenter de dire m et n) sont en bijection si et seulement si $m = n$, ce qui conduit à une définition alternative de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$: « $m \leq n$ si et seulement s'il existe une injection de m dans n ». On peut de plus montrer avec cette définition que $\mathbb{N}$ s'injecte dans n'importe quel ensemble infini et que les ensembles « non-infinis » (au sens où ils ne vérifient pas la définition donnée plus haut) sont exactement ceux en bijection avec une partie finie de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire les ensembles finis au sens intuitif. ◄

Le cas des ensembles finis ne recèle pas de mystères (même si calculer le cardinal d'un ensemble donné n'est pas forcément facile). Nous dirons bien sûr qu'un ensemble est **fini** si et seulement s'il n'est pas infini. Parmi les ensembles infinis, ceux qui sont en bijection avec $\mathbb{N}$ méritent un nom particulier.

Définition 1.4.5. — Un ensemble qui a le même cardinal que $\mathbb{N}$ est dit **dénombrable**.

Les ensembles dénombrables sont ceux dont on peut lister les éléments en affectant à chacun un *numéro* (un entier naturel), ou encore les ranger dans une *suite*. Comme le montre l'exercice 1.4.13 ci-dessous, il existe des ensembles *notablement plus gros que* $\mathbb{N}$, c'est-à-dire infinis mais qui ne sont pas en bijection avec les entiers naturels. L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est un exemple d'un tel ensemble. On ne peut donc pas *énumérer* un à un ses éléments. Cette découverte surprenante (pour l'intuition) est dûe au mathématicien allemand Georg Cantor en 1874 mais a mis du temps à s'implanter solidement parmi les mathématiciens... en commençant par son auteur lui-même !

► Un corollaire de la découverte de Cantor est donc qu'il existe *plusieurs sortes d'ensembles infinis*, les ensembles dénombrables en étant les plus simples ! Nous montrerons plus loin dans ce cours que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ est donc sensiblement plus grand que $\mathbb{N}$. De la même façon, les parties de $\mathbb{R}$ forment un ensemble plus gros que $\mathbb{R}$!

Un problème célèbre en mathématiques est celui de *l'hypothèse du continu*, postulée par Cantor : toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est soit dénombrable, soit de même cardinal que $\mathbb{R}$. On sait maintenant que cette hypothèse est « indécidable » : on ne peut la déduire des axiomes de la théorie des ensembles

et de la construction de $\mathbb{N}$ que nous avons esquissée ni en déduire une contradiction si on l'adopte. Cette affirmation n'est pas incompatible avec le principe du tiers-exclu évoqué au chapitre précédent. Nous sommes précisément en face d'une propriété « indémontrable » , ce qui ne signifie pas qu'elle ne possède pas de valeur précise de vérité mais que cette dernière nous échappe au sens où elle reste inaccessible aux règles des démonstrations mathématiques.

Aussi surprenant que cela puisse paraitre, il existe des techniques mathématiques (très sophistiquées) qui permettent de *démontrer qu'une certaine assertion est indémontrable*. Pour ce faire, il faut naturellement préciser quels sont les assertions placées au fondement de la théorie, c'est-à-dire celles dont on dispose initialement et les valeurs de vérités qui leur sont affectées et à partir desquelles on essaie de déduire toutes les autres. S'agissant de la théorie des ensembles et des entiers naturels, il existe un choix usuel de tels axiomes (avec quelques variantes), et l'indécidabilité de l'hypothèse du continu évoquée ci-dessus est donc relative à ce choix d'axiomes. ◀

Exercices. —

Exercice 1.4.6. — Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ a le même cardinal que $\mathbb{N}$. Montrer que le complémentaire de toute partie finie de $\mathbb{N}$ a le même cardinal que $\mathbb{N}$.

Exercice 1.4.7. — Montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. En déduire que s'il existe une injection d'un ensemble E dans $\mathbb{N}$, alors E est dénombrable ou fini.

Exercice 1.4.8. — Montrer que $\mathbb{Z}$ a le même cardinal que $\mathbb{N}$.

Exercice 1.4.9. — Si E et F sont deux ensembles dénombrables, montrer que $E \times F$ est dénombrable.

Exercice 1.4.10. — Utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 1.4.11. — Montrer que l'ensemble dont les éléments sont les parties finies de $\mathbb{N}$ est de même cardinal que $\mathbb{N}$. *Indication* : on pourra utiliser ici l'écriture décimale des entiers et la fonction qui à une partie finie A de $\mathbb{N}$ associe l'entier $\sum_{i=0}^{\infty} \chi_A(i)10^i$.

Exercice (⋆) 1.4.12. — Soit X un ensemble infini et D une partie dénombrable de X. Montrer que si $X \setminus D$ est infini, alors il est en bijection avec X.

Exercice (⋆) 1.4.13. — L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de toutes les parties de $\mathbb{N}$. Par l'absurde, on suppose qu'on dispose d'une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on note $A_n = \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ et k un entier. Montrer que l'expression « le k-ième élement de A » a un sens.
2. Construire par récurrence une suite d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

   $(i)\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} > x_n,$ et $(ii)\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n$ n'est pas égal au $(n+1)$-ième élément de A_n.
3. Montrer que $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas dans l'image de φ. Conclure.

1.5. Nombres rationnels

Les nombres rationnels s'obtiennent assez facilement à partir des entiers relatifs. Leur définition sera néanmoins l'occasion de rappeler certaines subtilités que l'on a tendance à oublier.

1.5.1. Une construction. — La construction de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ ressemble beaucoup à celle de $\mathbb{Z}$. L'idée est de partir de l'inexistence de la division dans $\mathbb{Z}$ et de définir un rationnel comme le résultat dune division « virtuelle » d'un entier relatif par un entier relatif non-nul. Bien entendu, deux telles divisions peuvent donner le même résultat, il nous faut donc disposer d'une notion d'équivalence entre fractions représentant le même rationnel.

Pour coller à l'usage traditionnel, nous décidons ici de noter $\frac{a}{b}$ un élement de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ plutôt que (a,b). Un tel élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ sera appelé une **fraction**. Nous nous permettrons donc partir de maintenant d'écrire des phrases du type « soit $\frac{a}{b}$ une fraction... », plutôt que d'écrire « soit (a,b) un élément de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$... ». A ce stade, l'écriture sous forme de quotient n'est rien d'autre qu'une *notation*, sans possibilité d'usage calculatoire.

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. On dit qu'elles sont *équivalentes* si $ad = bc$. La *classe de* $\frac{a}{b}$ est alors définie comme l'ensemble de toutes les fractions équivalentes à $\frac{a}{b}$.

Définition 1.5.1. — Un **nombre rationnel** est une classe de fractions équivalentes. On dit alors que chaque fraction $\frac{a}{b}$ à l'intérieur de la classe **représente le rationnel**. L'ensemble formé par tous les nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Attention : *une fraction n'est pas un rationnel, mais une façon de le représenter* (comme un quotient). Chaque rationnel possède une infinité de représentations différentes comme fraction et le rationnel est le « résultat commun de tous ces quotients » (phrase qui n'a pas vraiment de sens pour l'instant car nous n'avons pas encore défini de division). En principe donc, nous ne devrions pas écrire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque nous voulons signifier que les rationnels représentés par ces deux fractions sont égaux. L'histoire a privilégié un usage contraire, consistant à utiliser des expressions du type « le rationnel $\frac{a}{b}$... » plutôt que « le rationnel représenté par la fraction $\frac{a}{b}$... ». Notre objectif n'étant pas de changer des habitudes bien implantées, nous nous comporterons conformément à l'usage, mais le lecteur devra être conscient que ce choix présente un risque : lorsque nous tenons un raisonnement portant sur ce que nous appelerons désormais « le rationnel $\frac{a}{b}$... » et que nous dérivons des conclusions à partir des valeurs de a et b, l'usage tend à nous faire oublier que l'écriture $\frac{a}{b}$ n'est qu'une des représentations possibles du rationnel et donc qu'il nous faut vérifier soigneusement que les résultats obtenus sont bien indépendants du choix de ce représentant !

Le monde n'étant pas complètement mauvais, il existe nénamoins un représentant privilégié de chaque rationnel non-nul (le rationnel nul, que nous noterons évidemment 0, est la classe formée de toutes les fractions du type $\frac{0}{q}$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$).

Lemme 1.5.2. — *Soit r un rationnel non-nul. Alors il existe une unique fraction $\frac{p}{q}$ représentant r telle que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q soient premiers entre eux. Une telle fraction est dite* ***irréductible***.

Lorsque le dénominateur de la fraction irréductible représentant notre rationnel est égal à 1, nous retrouvons bien évidemment les entiers relatifs (que nous noterons comme d'habitude, c'est-à-dire sans l'aide d'une fraction de dénominateur égal à 1).

1.5.2. Les opérations. — Les fractions irréductibles ne rendent malheureusement pas autant de services que le lecteur pourrait croire. S'il accepte pendant quelques instants de faire comme si nous avions déjà défini l'addition des rationnels, le lecteur se convaincra aisément que l'addition de deux rationnels donnés sous forme irréductible ne donnera pas toujours naissance à une fraction irréductible. En conséquence, pour définir l'addition, il nous faut recourir à une méthode très proche de celle que nous avons employée pour les entiers relatifs plutôt que de nous reposer sur les fractions irréductibles.

Addition. — Nous commençons par définir l'addition de deux fractions comme

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} := \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$$

puis nous vérifions que si la fraction $\frac{p'_1}{q'_1}$ représente le même rationnel que $\frac{p_1}{q_1}$ et si la fraction $\frac{p_2}{q_2}$ représente le même rationnel que $\frac{p'_2}{q'_2}$, alors la fraction $\frac{p'_1q'_2+p'_2q'_1}{q'_1q'_2}$ représente le même rationnel que $\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$ (calculs laissés au lecteur). Comme précédemment, cette procédure définit de manière non ambigüe une *addition* dans $\mathbb{Q}$, qui étend aux nombres rationnels l'addition des entiers relatifs (cette dernière phrase signifie que, comme $\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{Q}$, on obtient le même résultat quand on multiplie deux entiers relatifs puis qu'on voit le résultat comme un rationnel ou quand on opère dans l'ordre inverse).

Il est évidemment facile de voir que le rationnel nul est élément neutre pour l'addition que tout rationnel possède un opposé : si un rationnel est représenté par la fraction $\frac{a}{b}$, alors la fraction $\frac{-a}{b}$ fournit cet opposé. Comme précédemment, il s'ensuit que nous avons à notre disposition une soustraction.

Multiplication. — Elle se définit de même en partant des fractions. Les calculs étant plus fastidieux, nous les laissons de nouveau au lecteur mais le principe est le même et nous étendons ainsi aux nombres rationnels la multiplication des entiers relatifs. On constate alors que l'opposé (pour l'addition) d'un rationnel est sa multiplication par -1. Par ailleurs, puisque tous les représentants d'un rationnel non-nul sont de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \neq 0$ [(6)] on constate aisément qu'il possède un inverse (pour la multiplication), qui n'est autre que le rationnel représenté par la fraction $\frac{b}{a}$.

On résume toutes les propriétés des deux opérations $+$ et $\times$ dans l'énoncé suivant que le lecteur pourra s'amuser à démontrer soigneusement.

Théorème 1.5.3. — *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif, c'est-à-dire que*

1. *l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives ;*
2. *l'addition possède un élément neutre* 0*, et tout élément de $\mathbb{Q}$ possède un opposé ;*
3. *la multiplication possède un élément neutre* 1*, et tout élément non-nul de $\mathbb{Q}$ possède un inverse ;*
4. *la multiplication est distributive sur l'addition.*

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est également muni d'un *ordre*. Tout rationnel pouvant être représenté par une fraction à dénominateur *strictement positif*, nous dirons que le rationnel représenté par la fraction $\frac{a}{b}$ (à dénominateur positif) est *positif ou nul* si et seulement si $a \geq 0$. Si $\frac{a'}{b'}$ représente le même rationnel (toujours avec dénominateur positif) , alors $a'b = ab'$ donc $a'b$ est positif ou nul, donc a' l'est aussi et on voit que cette définition ne dépend pas du représentant choisi (exercice : quel rôle joue ici le dénominateur positif ?). De la même façon que précédemment, on décide que, étant donnés deux rationnels r et r', on a $r \geq r'$ si et seulement si $r - r'$ est positif.

Théorème 1.5.4. — *L'ordre des élements de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ vérifie :*

$$\forall (r, r') \in \mathbb{Q}_+,\ r + r' \geq 0 \textit{ et } rr' \geq 0.$$

De plus, $\mathbb{Q}$ est un corps archimédien, c'est-à-dire que

$$\forall (r, r') \in \mathbb{Q}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } nr \geq r'.$$

(6)Par nature on a toujours $b \neq 0$.

Démonstration. — La première partie ne présente aucune difficulté et est laissée au lecteur. Pour le caractère archimédien, on prend deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ représentant r et r' et à dénominateurs strictement positifs. Alors a et a' sont strictement positifs et quitte à changer de représentants, on peut supposer que $b = b'$. Il suffit alors de trouver un n dans $\mathbb{N}$ tel que $na \geq a'$ ce que nous savons vrai dans $\mathbb{N}$ (par exemple en remarquant que l'ensemble des entiers de la forme na est infini tandis que celui des entiers inférieurs strictement à a' ne l'est pas). □

Nous avons donc défini de manière totalement satisfaisante l'ensemble des nombres rationnels. A partir de maintenant, nous nous en servirons comme à l'habitude et sans nous poser plus de questions.

Exercices. —

Exercice 1.5.5. — Soit r et s deux rationnels distincts tels que $r < s$. Montrer qu'il existe un rationnel t tel que $r < t < s$. En déduire qu'entre deux rationnels distincts on peut toujours trouver une infinité de rationnels distincts.

Exercice 1.5.6. — Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Montrer en revanche qu'il n'existe aucune application bijective et *croissante* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ (autrement dit, on ne peut pas numéroter dans l'ordre croissant les éléments de $\mathbb{Q}$). Même question avec $\mathbb{Q}_+$.

Exercice 1.5.7. — Soit un entier $n \geq 2$. Montrer que la somme de n nombres impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.

Exercice (⋆) 1.5.8. — Soit un entier $n \geq 2$.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel ℓ tel que $2^\ell \leq n \leq 2^{\ell+1}$.

b. Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, il existe un entier j tel que $0 \leq j \leq n$ vérifiant

$$k = 2^j p \text{ avec } p \text{ impair.}$$

c. Montrer que si $j = \ell$ dans la question précédente, alors $k = 2^\ell$.

d. Déduire des questions précédentes que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ n'est pas un entier (*indication* : on pourra exercer son intuition en mettant sous forme de fraction irréductible les résultats de ces sommes pour $n = 2, 3, 4, 5$...)

1.6. Développement décimal d'un nombre rationnel

1.6.1. Ecriture décimale. — Nous disposons à présent d'une définition complète des rationnels mais un élément nous manque encore pour faire coïncider celle-ci avec notre vision intuitive des nombres : ce élément est *l'écriture décimale* ou *développement décimal*, c'est-à-dire l'écriture qui fait intervenir des chiffres et une virgule...

Définition 1.6.1. — Un nombre décimal est un nombre rationnel qui peut être représenté par une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Dit autrement, $x \in \mathbb{Q}$ est décimal si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x$ soit entier. Attention, tous les rationnels ne sont pas des décimaux (exemple : $\frac{1}{3}$). En anticipant un peu, les décimaux sont les rationnels dont l'écriture décimale est *finie*, c'est-à-dire que lorsqu'on liste les chiffres après la virgule, on finit par ne plus rencontrer que des 0.

Exercice 1.6.2. — La somme de deux décimaux est un décimal. L'opposé d'un décimal est un décimal. Le produit de deux décimaux est un décimal. L'inverse d'un décimal non-nul n'est pas nécessairement un décimal.

Le rôle essentiel des décimaux est de fournir de bons outils d'approximation des rationnels, et plus tard des réels. Commençons tout d'abord par rechercher une *approximation entière* d'un rationnel : prenons $x \in \mathbb{Q}$, représenté par la fraction $\frac{a}{b}$, où nous pouvons supposer que $b > 0$. La division euclidienne nous assure alors que

$$a = a_0 b + r_0, \quad \text{avec } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq r_0 < b.$$

Ainsi,

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_0}{b}$$

où le dernier terme est positif ou nul est strictement plus petit que 1. Nous pouvons en déduire que a_0 est la **partie entière** de x, c'est-à-dire *le plus petit entier inférieur ou égal à* x. (Attention, avec cette définition, qui est la définition usuelle, la partie entière de $-\frac{3}{2}$ est -2...)

Exercice 1.6.3. — Nous venons de définir la partie entière d'un rationnel représenté par la fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b \in \mathbb{N}^*$) comme le quotient de la division euclidienne de a par b. Montrer que si la fraction $\frac{a'}{b'}$ (avec $b' \in \mathbb{N}^*$) représente le même rationnel, alors le quotient de la division euclidienne de a' par b' redonne le même résultat (*indication* : utiliser l'unicité de la division euclidienne). Le résultat de cet exercice justifie que les résultats de tous les calculs qui vont suivre ne dépendent que du rationnel et pas de sa représentation sous forme de fraction.

Pour trouver le développement décimal d'un rationnel, il suffit d'itérer ce processus. En effet, partant d'un rationnel $x = \frac{a}{b}$, nous venons de trouver $a_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a_0 \leq \frac{a}{b} < a_0 + 1$$

ce qui se lit également comme

$$0 \leq \frac{r_0}{b} < 1.$$

Le chiffre suivant dans le développement décimal de x n'est autre que la partie entière de $10\frac{r_0}{b}$, qui s'obtient en appliquant la même méthode : on fait la division euclidienne de $10r_0$ par b, soit

$$10r_0 = a_1 b + r_1, \quad \text{avec } a_1 \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq r_1 \leq b - 1.$$

Alors la partie entière de $10\frac{r_0}{b}$ est a_1.

En répétant ce raisonnement *ad libitam*, nous pouvons mettre sur pied l'algorithme suivant.

Pour trouver le développement décimal d'un rationnel x donné sous forme de fraction $\frac{a}{b}$, on effectue les étapes suivantes :

0. *la division euclidienne de a par b : $a = a_0 b + r_0$; a_0 est la partie entière de x ;*
1. *la division euclidienne de $10r_0$ par b : $10r_0 = a_1 b + r_1$;*
2. *la division euclidienne de $10r_1$ par b : $10r_1 = a_2 b + r_2$;*

   ...

n. *la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b : $10r_{n-1} = a_n b + r_n$;*

   etc.

Le développement décimal de x est donné par la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Pourquoi cet algorithme fournit-il bien un développement décimal ? Nous pouvons déjà noter qu'à l'exception de a_0 (qui est la partie entière de x et est donc un entier relatif) les a_i sont des *chiffres*.

Lemme 1.6.4. — *Dès que $i \geq 1$, $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.*

Démonstration. — Pour tout $i \geq 1$, a_i est le quotient de la division euclidienne $10r_{i-1} = a_i b + r_i$. Or

$$10r_{i-1} = a_i b + r_i \geq a_i b$$

(car $r_i \geq 0$), d'où l'on tire

$$a_i \leq 10\,\frac{r_{i-1}}{b} < 10$$

(car $r_{i-1} < b$). Par ailleurs,

$$0 \leq 10r_{i-1} = a_i b + r_i < a_i b + b$$

(car $r_{i-1} \geq 0$ et $r_i < b$), d'où l'on déduit que $(a_i + 1)b > 0$ et donc $a_i > -1$ car $b > 0$. □

Le résultat de cet algorithme sera désormais appelé **le développement décimal** du rationnel x (il faut bien comprendre cette phrase : si une écriture décimale est obtenue pour un rationnel x par un autre procédé, elle n'a aucune raison d'être « le » développement décimal de x, qui sera pour nous celui donné par l'algorithme... et aucun autre). Afin de disposer d'une écriture qui distingue écriture décimale et multiplications des chiffres a_i entre eux, on notera souvent

$$x = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots.}$$

Attention, il est important de réaliser que cette écriture n'est qu'une notation. En effet nous ne sommes pas en mesure de faire des *calculs* avec des écritures décimales (notamment à cause du phénomène de « retenues infinies », *cf.* plus loin).

Remarque 1.6.5. — Le lecteur sera attentif au fait que le développement donné ici correspond bien au développement « usuel » lorsque le rationnel est positif mais ne l'est pas lorsqu'il est négatif ! En effet, la première étape de l'algorithme consiste à prendre la partie entière a_0 de x, puis à développer le rationnel *positif* $x - a_0$. Explicitons le cas de $x = -\frac{1}{3}$: la partie entière est $a_0 = -1$ donc $x - a_0 = \frac{2}{3}$. Le développement obtenu est

$$-\tfrac{1}{3} = -1 + \overline{0, 66666\ldots.}$$

et pas $-0, 33333...$ comme l'usage le voudrait. Pour obtenir le développement usuel d'un rationnel négatif, il suffit d'appliquer l'algorithme précédent à son opposé. Ce choix pourra sembler maladroit au lecteur, mais il est cohérent avec un objectif général de ce chapitre : obtenir une bijecton entre $\mathbb{Q}$ et un ensemble de suites d'entiers et de chiffres (le développement usuel ne donne pas une telle bijection car il faut disposer d'une information supplémentaire : le signe).

Par ailleurs ce développement semble nécessiter un nombre infini d'opérations. En réalité, il n'en est rien.

Théorème 1.6.6. — *Pour tout rationnel x, la suite $(a_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de l'algorithme précédent est périodique à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq N$, $a_{n+T} = a_n$ et $r_{n+T} = r_n$.*

Démonstration. — On commence par remarquer que si pour un couple d'entiers $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $p > n$ on a $r_p = r_n$, alors la division euclidienne de $10r_p$ par b est la même que celle de $10r_n$ par b donc $a_{p+1} = a_{n+1}$ et $r_{p+1} = r_{n+1}$. Les deux suites deviennent donc périodiques à partir du rang $n + 1$ (on peut donc prendre $N = n + 1$ et $T = p - n$).

Il suffit donc de montrer qu'il existe deux rangs n et p différents tels que $r_n = r_p$. Or, par nature, les restes r_i prennent leurs valeurs dans $\{0, 1, \ldots, b - 1\}$ donc dans un ensemble fini. Ainsi, au bout de $b + 1$ étapes au plus tard, on doit retomber sur un reste déjà rencontré... □

Ce résultat a la conséquence fondamentale suivante.

Corollaire 1.6.7. — *Le développement décimal d'un rationnel est toujours périodique à partir d'un certain rang*

Cette particularité permet d'écrire tout développement de rationnel sous une forme compacte

$$x = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 \cdots \underline{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+T-1}} \ldots}\ ,$$

la barre de soulignement désignant le motif qui se répète à l'infini.

Remarque 1.6.8. — Attention, il n'est pas vrai que les suites deviennent périodiques dès que l'on rencontre pour la première fois une répétition d'un chiffre dans le développement, c'est-à-dire dès qu'il y a une répétition des *quotients*. C'est la répétition des *restes* qui assure que le développement devient périodique, mais il peut y avoir des répétitions occasionnelles de chiffres dans le développement sans que l'on ait encore atteint le rang où apparait la périodicité. C'est le cas par exemple du rationnel $x = \frac{34}{300}$ dont le développement est

$$\overline{0, 11\underline{3} \ldots}$$

(il y a deux 1 mais le développement ne devient périodique qu'avec l'apparition du premier 3).

1.6.2. Approximations décimales d'un rationnel. — Le développement décimal permet d'obtenir de bonnes approximations des rationnels par les nombres décimaux.

Considérons d'abord le cas où x est lui-même un décimal positif. Alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $q = 10^s x$ soit entier. Autrement dit, on peut écrire $x = \frac{q}{10^s}$ et utiliser cette fraction pour calculer son développement décimal. Il est alors facile de voir que les premiers chiffres du développement décimal de x sont les chiffres composant l'entier q et qu'une fois ceux-ci épuisés, on trouve une suite infinie de 0. Il s'agit donc (heureusement !) de l'écriture usuelle de x.

Exercice 1.6.9. — Le but de cet exercice est de vérifier ce qui vient d'être affirmé.

a. Etant donné un entier relatif a_0 et une suite *finie* de chiffres $(a_1, \ldots, a_s)$, montrer qu'il existe un décimal x tel que son développement décimal soit

$$x = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 \cdots a_s \underline{0} \ldots}\ .$$

b. Soit maintenant q un entier positif écrit sous forme décimale $q = \overline{n_r n_{r-1} \ldots n_1 n_0}$ où chaque n_i est un chiffre, et soit de plus $s \in \mathbb{N}$ et $x = \frac{q}{10^s}$. On suppose $r \geq s$, on écrit $q = \sum_{i=s}^{r} n_i\, 10^i + \sum_{i=0}^{s-1} n_i\, 10^i$ et on pose $a_0 = \sum_{i=s}^{r} n_i\, 10^{i-s}$, $a_1 = n_{s-1}$, $a_2 = n_{s-2}$, ..., $a_s = n_0$ et $a_p = 0$ pour tout $p > s$. Montrer que $x = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 \cdots a_s \underline{0} \ldots}$.

c. On suppose au contraire que $r < s$, on note $q = \sum_{i=0}^{s} n_i\, 10^i$ avec $n_i = 0$ si $r + 1 \leq i \leq s$; dans ce cas, on pose alors $a_0 = 0$, $a_1 = n_{s-1}$, $a_2 = n_{s-2}$, ..., $a_s = n_0$ et $a_p = 0$ pour tout $p > s$. Montrer que $x = \overline{0, a_1 a_2 \cdots a_s \underline{0} \ldots}$.

Passons maintenant au cas général. Soit x un rationnel, auquel nous appliquons l'algorithme précédent : nous obtenons donc un développement (périodique à partir d'un certain rang)

$$x = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 \ldots}$$

et, pour tout entier $n \geq 1$, nous décidons d'appeler x_n le nombre décimal obtenu en *tronquant ce décimal à l'ordre n*, c'est-à-dire

$$x_n = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 \cdots a_n \underline{0} \ldots}\ .$$

Lemme 1.6.10. — $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$.

Démonstration. — Facile et laissée au lecteur. □

Définition 1.6.11. — On appelle **approximation décimale par défaut à l'ordre** 10^{-n} **près** du rationnel x un décimal x_n tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Il n'existe qu'un seul décimal de la forme $\frac{q}{10^n}$ avec q entier vérifiant cette propriété. On appelle ensuite **approximation décimale par excès à l'ordre** 10^{-n} **près** le décimal $x'_n = x_n + \frac{1}{10^n}$.

Autrement dit, cette définition se double d'une propositio qui affirme qu'il existe un et un seul entier q tel que si on note $x_n = \frac{q}{10^n}$ et $x'_n = \frac{q+1}{10^n}$, alors

$$x_n \leq x < x'_n\ .$$

Le lecteur pourrait s'étonner de la présence d'une inégalité stricte à droite et large à gauche. Ce phénomène est en réalité *fondamental*, car c'est lui qui assure l'unicité de l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près (c'est-à-dire l'unicité de l'entier q, *cf*. les exercices ci-dessous pour une preuve).

Pour s'en convaincre, considérons le cas où x est lui-même un décimal. Alors $y = x - \frac{1}{10^n}$ est également décimal et on a

$$x \leq x \leq x + \frac{1}{10^n} \quad \text{et} \quad y \leq x \leq y + \frac{1}{10^n}.$$

Il existe donc *deux* décimaux différents (x et y), tous deux de la forme $\frac{q}{10^n}$ avec q entier (au moins si n est assez grand), qui encadrent x à 10^{-n} près *avec des inégalités larges des deux côtés*. Si en revanche on impose à l'inégalité de droite d'être stricte (et, bien sûr, que l'on se restreint aux décimaux de la forme $\frac{q}{10^n}$ avec q entier), alors il n'y a qu'une seule solution, qui est le décimal x_n défini plus haut.

Exercice 1.6.12. — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$.

Exercice 1.6.13. — Montrer soigneusement que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$ (avec x_n comme défini plus haut). *Indication* : on pourra commencer par montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x - x_n = \frac{r_{n+1}}{10^n b},$$

puis en déduire les deux inégalités souhaitées en utilisant les propriétés de la division euclidienne.

Exercice 1.6.14. — Montrer qu'étant donnés x un rationnel et $n \in \mathbb{N}$, il existe effectivement un *unique* entier q_n tel que si on note $x_n = \frac{q_n}{10^n}$, alors $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$.

1.6.3. Suites infinies de 9. **—** Les considérations du paragraphe précédent mettent en évidence un phénomène très important : parmi les suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'entiers telles que a_i soit un chiffre pour tout $i \geq 1$ et périodiques à partir d'un certain rang (les « candidates à être un développement décimal de rationnel »), certaines sont *interdites* ! Prenons en effet la suite

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall i \geq 1, \quad a_i = 9 .$$

S'il existe un rationnel x tel que cette suite soit le développement décimal de x (c'est-à-dire : s'il existe un rationnel x tel que l'algorithme défini plus haut donne comme résultat les a_i), alors pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 ... a_n \underline{0} ...} = 0 + \overline{0, 99...9\underline{0}...} = 1 - \frac{1}{10^n},$$

et

$$x'_n = x_n + \frac{1}{10^n} = \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) + \frac{1}{10^n} = 1.$$

Donc

$$1 - \frac{1}{10^n} \leq x \leq 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On en déduit donc que $x = 1$, puisque 1 est le seul rationnel qui vérifie cet encadrement pour tout n (s'il en existait un second, mettons y, alors $y < 1$ et la distance $1 - y$ entre y et 1 est strictement positive donc il existe un entier n tel que $\frac{1}{10^n} < 1 - y$, ce qui peut se réécrire $y < 1 - \frac{1}{10^n}$ en contradiction avec les inégalités qui doivent être vérifiées par y). Or il est facile (faites-le !) de vérifier que le développement décimal de 1, tel qu'obtenu par l'algorithme, est bien celui que l'on attend, à savoir

$$1 = 1 + \overline{0, \underline{0}...}.$$

Cet exercice manipulatoire peut être répété pour toute suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui ne comporte plus que des 9 à partir d'une certain rang : on trouve toujours que le rationnel candidat est en réalité un décimal et que son développement obtenu *via* notre algorithme n'est pas celui donné par la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mais son développement usuel en tant que décimal, c'est-à-dire celui qui se termine par une suite infinie de 0 (faites-le sur d'autres exemples). On en conclut que *les suites infinies de* 9 ne sont pas des développements décimaux acceptables.

Exercice (⋆) 1.6.15. — Si x est un rationnel donné par une fraction $\frac{a}{b}$ et que son développement décimal (obtenu par notre algorithme) est

$$x = a_0 + \overline{0, a_1 a_2 ...},$$

montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $p \geq n + 1$ tel que $a_p \neq 9$. *Indication* : raisonner par l'absurde en supposant que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall p \geq n, \quad a_p = 9$$

(au fait, pourquoi est-ce la négation de la proposition à prouver ?) et en déduire alors que la suite des restes à partir du rang n, c'est-à-dire $(r_p)_{p\geq n}$, est positive et strictement décroissante.

1.6.4. Les rationnels vus à travers leurs développements décimaux. — L'algorithme précédent permet de définir une application « développement décimal » $\mathfrak{D} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{P}$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}$ formé des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

- le premier terme a_0 est un entier relatif ;
- les termes suivants a_i sont des chiffres pour tout $i \geq 1$;
- pour tout $n \geq 1$, il existe $p \geq n + 1$ tel que $a_p \neq 9$ (pas de suite infinie de 9).

De plus, les développements décimaux des rationnels sont tous à valeurs dans le sous-ensemble $\mathcal{P}_{\text{per}}$ de $\mathcal{P}$ formé des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui sont périodiques à partir d'un certain rang.

Théorème 1.6.16. — *L'application « développement décimal »* $\mathfrak{D} : \mathbb{Q} \to \mathcal{P}_{\text{per}}$ *est une bijection.*

Démonstration. — La preuve de l'injectivité repose sur une propriété de monotonie : $\mathfrak{D}$ est en effet une application strictement croissante lorsque l'on munit l'ensemble $\mathcal{P}$ d'un ordre bien choisi.

Définition 1.6.17. — L'**ordre lexicographique** sur $\mathcal{P}$ est défini comme suit : si $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathcal{P}$, on dit que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \prec (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si $a_0 < b_0$ ou s'il existe un entier $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$a_k = b_k \quad \text{pour tout } k \leq j, \quad \text{et } a_{j+1} < b_{j+1}.$$

Prenons maintenant deux rationnels x et y tels que $x < y$, et notons $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ leurs développements décimaux. La fonction « partie entière » est une fonction croissante donc $a_0 \leq b_0$. Si $a_0 < b_0$ alors le résultat voulu est démontré. Sinon, on peut montrer facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$ implique que $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ (toujours en utilisant la croissance de la partie entière). Deux situations sont alors possibles :

1. pour un certain $j \in \mathbb{N}$ on a $a_k = b_k$ pour tout $k \leq j$ et $a_{j+1} < b_{j+1}$ (et on a fini la preuve) ;
2. les deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont égales.

Dans le second cas, les approximations décimales par défaut x_n (obtenues en tronquant les développements décimaux) de x et de y sont égales à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, donc

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

soit encore

$$x - \frac{1}{10^n} < x_n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{et de même } y - \frac{1}{10^n} < x_n \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(puisque x_n est aussi l'approximation décimale par défaut de y à l'ordre n). En utilisant la première inégalité de la première ligne et la seconde inégalité de la seconde ligne, on obtient

$$x - \frac{1}{10^n} < y,$$

tandis que la seconde inégalité de la première ligne et la première inégalité de la seconde ligne fournit

$$y - \frac{1}{10^n} < x.$$

Ces deux résultats se résument en

$$|x - y| < \frac{1}{10^n}$$

et ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui assure que $x = y$. Comme nous avons fait l'hypothèse que $x < y$, cela n'est pas possible et donc nous sommes dans le premier cas, c'est-à-dire que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \prec (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

La preuve de la surjectivité est laissée au lecteur, *cf*. les exercices 1.6.19, 1.6.20 et 1.6.21. □

Exercice 1.6.18. — Comparer le développement décimal de $1/7$ avec celui de $8/7$ puis avec celui de $3/7$. Expliquer les phénomènes observés (on pourra aussi s'intéresser à $10/7$).

Exercice 1.6.19. — On considère l'entier n dont l'écriture décimale est $\overline{abcd}$, c'est-à-dire que a, b, c et d sont des chiffres et que $n = 1000a + 100b + 10c + d$. Quel est le développement décimal de $\frac{n}{9999}$?

Exercice 1.6.20. — Trouver une fraction irréductible représentant le rationnel dont le développement décimal est $12 + \overline{0,59\underline{123}...}$ (où 123 se répète indéfiniment). Même question avec $-209 + \overline{0,837\underline{58}...}$.

Exercice (⋆) 1.6.21. — En s'inspirant des deux exercices précédents, essayer d'imaginer une méthode générale qui montre la surjectivité de l'application $\mathfrak{D}$ définie dans le cours.

Exercice 1.6.22. — On considère le rationnel $r = \frac{a}{113}$ où $\in \mathbb{N}$ et on suppose que son développement décimal commence par $3,141...$ (et la suite est inconnue pour le moment). Calculer a et comparer r et π. Un ordinateur donne ensuite un début de développement plus précis : $r = 3,14159292...$ (où la suite est toujours inconnue). Donner un argument montrant que la suite du développement n'est pas ...92929292....

CHAPITRE 2

LES NOMBRES RÉELS

L'ensemble des nombres réels est un des ensembles (voire l'ensemble ?) les plus importants des mathématiques. Mais qu'est-ce qu'un nombre réel ? Cinq minutes de réflexion montrent vite qu'il ne s'agit pas d'une question si aisée. La réponse la plus naturelle consiste à répondre (et nous nous fonderons par la suite sur cette idée) « les nombres qui s'écrivent avec des chiffres après la virgule », c'est-à-dire un développement décimal illimité. Certes, mais est-ce si simple ? En particulier, êtes-vous vraiment capable d'additionner deux réels donnés sous cette forme ? Si les nombres sont des décimaux, pas de problème, mais si les développements sont vraiment illimités, comment faire, alors que l'on peut se convaincre facilement qu'is donnent aisément naissance à une infinité de « retenues » ?

De fait cette question délicate n'a été tranchée que relativement récemment dans l'histoire des mathématiques, à la fin du XIXe siècle, suite aux efforts de Georg Cantor (que nous avons déjà rencontré au chapitre précédent) et surtout Richard Dedekind. La construction que nous donnons ci-dessous n'est pas la construction originale de Dedekind (1872) mais une autre, qui présente l'avantage de s'appuyer sur notre étude des nombres rationnels.

Remarque. — L'ensemble de ce chapitre est d'un niveau d'exigence plus élevé que le reste du cours. Pour conserver à ce texte une longueur raisonnable, nous ne donnerons donc ci-dessous qu'une version abrégée de la construction. Le lecteur pourra trouver la construction complète dans les deux références suivantes :

- Daniel Perrin, *Mathématiques d'école*, chapitre 3, annexe B[(1)] ;
- Barbara and John Hubbard, *Vector Calculus, linear algebra and differential forms, a unified approach*, chapitre 0, section 0.4.

2.1. Construction

2.1.1. Définition. — Le chapitre précédent a conduit à représenter les rationnels comme des suites constituées d'un entier relatif et de chiffres. Nous avons néanmoins constaté que les développements décimaux des rationnels sont très particuliers : non seulement ils ne peuvent pas présenter de suites infinies de 9 mais surtout ils sont *périodiques*.

La première de ces deux restrictions est, comme nous l'avons vu, inévitable : une suite qui à partir d'un certain rang n'est plus constituée que de 9 ne peut être « associée » (*cf*. le chapitre précédent) qu'à un nombre décimal, mais le développement décimal de celui-ci, donné par l'algorithme du chapitre

(1) en prenant garde que la preuve de la proposition 4.5 de ce livre est malheureusement erronée ; une démonstration correcte de cet énoncé est donc donnée en détails dans le présent polycopié...

précédent, n'est pas cette suite et se termine au contraire par une suite infinie de 0. Nous appellerons désormais **développement décimal propre** une suite constituée d'un entier relatif en premier terme et de chiffres qui ne se conclut pas par une suite infinie de 9. Nous retiendrons de plus qu'au sein des rationnels, les nombres décimaux possèdent un développement propre (comme tous les autres rationnels) et aussi des développements *impropres* qui se terminent par une suite infinie de 9 et qui sont donc de moindre intérêt. Les rationnels non décimaux (par exemple $\frac{1}{3}$) ne possèdent qu'un seul développement décimal, qui est le développement propre.

La seconde restriction est plus intéressante : en effet, la partie $\mathcal{P}_{\text{per}}$ formée des développements décimaux propres et *périodiques* à partir d'un certain rang ne représente qu'une toute petite partie de l'ensemble $\mathcal{P}$ des développements décimaux propres. Mais quel sens donner à tous les développement décimaux propres, périodiques ou non ? La réponse est simple : il s'agit des nombres réels.

Définition 2.1.1. — L'ensemble $\mathcal{P}$ des développements décimaux propres est désormais appelé **ensemble des nombres réels** et noté désormais $\mathbb{R}$.

Un réel est donc donné par une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 \in \mathbb{Z}$, a_i est un chiffre pour tout $i \geq 1$ et la suite « ne se termine pas par une suite infinie de 9 », c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $p > n$ tel que $a_p \neq 9$. Un tel réel x peut donc s'écrire

$$x = a_0 + \overline{0, a_1a_2a_3...}$$

(bien noter qu'il n'y a plus de périodicité ici, donc plus de barre de soulignement). Nous avons donc retrouvé là les nombres réels « naïfs », c'est-à-dire ceux donnés par une écriture « avec des chiffres après la virgule ». La seule subtilité est que nous devons, comme nous l'avons déjà vu, nous interdire toute écriture qui ne ferait plus intervenir que des 9 à partir d'un certain rang.

Proposition 2.1.2. — *L'ensemble $\mathbb{R}$ possède les premières propriétés suivantes :*

1. *$\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$;*
2. *$\mathbb{R}$ possède un ordre naturel : l'ordre lexicographique, qui coïncide sur les rationnels avec l'ordre usuel dans $\mathbb{Q}$, avec ses propriétés vis-à-vis des opérations* dans *$\mathbb{Q}$;*
3. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, autrement dit :*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists r \in \mathbb{Q} \ \textit{tel que} \ \ x < r < z\ ;$$
4. *Tout réel est encadré par deux suites de décimaux, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et x'_n sont les approximations décimales par défaut et par excès de x à 10^{-n} près. Ainsi,*
$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n} = x'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 2.1.3. — Rappelons encore une fois ici que nous avons choisi une convention un peu inhabituelle pour l'écriture décimale des nombres négatifs. Plus précisément, nous écrivons tout réel x comme

$$x = a_0 + \overline{0, a_1a_2a_3...}$$

où a_0 est la partie entière de x et l'autre partie (« la partie fractionnaire ») est nécessairement positive ou nulle (ainsi, par exemple, le réel noté usuellement $-3,5$ s'écrit $-4 + 0,5$ dans nos conventions). Ce choix a en revanche pour avantage que l'ordre des éléments de $\mathbb{R}$ est naturellement l'ordre lexicographique (ce n'est pas le cas pour l'écriture usuelle), ce qui justifie son utilisation dans le cadre d'une *construction* de $\mathbb{R}$ et de ses opérations. Cela ne nous empêchera pas d'utiliser la notation usuelle par la suite...

Démonstration. — Seule la troisième propriété nécessite une preuve. Soient donc x et y deux réels distincts tels que $x < y$, et notons $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ leurs écritures décimales. L'inégalité $x < y$ implique soit que $a_0 < b_0$; soit qu'il existe un rang $j \in \mathbb{N}$ tel que $a_k = b_k$ pour tout $k \leq j$ et $a_{j+1} < b_{j+1}$.

Dans le premier cas, on note p le premier entier strictement positif tel que $a_p < 9$ (existe toujours) et on pose $r = a_0 + \overline{0, a_1 ... a_{p-1} 9}$. Ce rationnel (qui est en fait un décimal) est effectivement strictement plus grand que x et strictement plus petit que y, donc il convient. Dans le second cas, on raisonne de manière presque identique, en notant p le premier entier strictement plus grand que j tel que $a_p < 9$ et on pose de même $r = a_0 + \overline{0, a_1 ... a_{p-1} 9}$. □

2.1.2. Intervalles. — L'ordre dans $\mathbb{R}$ nous fournit immédiatement la notion d'**intervalle**. Nous définissons donc, pour x et y dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
]-\infty, x[&:= \{a \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
]-\infty, x] &:= \{a \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
]x, +\infty[&:= \{a \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\
[x, +\infty[&:= \{a \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\
]x, y[&:= \{a \in \mathbb{R} \mid x < a < y\} \\
[x, y[&:= \{a \in \mathbb{R} \mid x \leq a < y\} \\
]x, y] &:= \{a \in \mathbb{R} \mid x < a \leq y\} \\
[x, y] &:= \{a \in \mathbb{R} \mid x \leq a \leq y\}
\end{aligned}$$

Parmi ceux-ci, nous distinguerons les intervalles **ouverts** (qui sont du premier, troisième ou cinquième type parmi les 8 types d'intervalles que nous venons de lister).

2.1.3. Suites adjacentes. — La définition des intervalles nous permet de disposer d'une première notion de **suite convergente**. Commençons par rappeler qu'une suite d'élements d'un ensemble E est une application de $\mathbb{N}$ dans E ; une suite de réels est donc une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note fréquemment

$$\begin{aligned}
u \; : \; \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
n &\longmapsto u_n
\end{aligned}$$

et la suite elle-même sera désignée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que u.

Définition 2.1.4. — On dit qu'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel x si pour tout intervalle I ouvert, non-vide et contenant x, il existe un entier n tel que $\forall m \geq n$ on a $u_m \in I$.

Autrement dit : la suite converge vers x si pour tout intervalle ouvert « autour de x », il existe un « moment » à partir duquel les éléments de la suite sont tous dans l'intervalle. Cette définition sera étudiée plus abondamment par la suite (et réécrite de multiples manières) lorsque nous disposerons de toutes les propriétés de l'ensemble des nombres réels, ce qui permettra de la manipuler de manière beaucoup plus efficace.

Exercice 2.1.5. — La suite $(10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ; de manière plus générale, étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de rationnels* et un *rationnel* ℓ, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-10^{-n} \leq u_n - \ell \leq 10^{-n}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. (Attention ! Il faut en particulier regarder avec attention comment se distinguent les développements décimaux de deux rationnels qui ne diffèrent de 10^{-n} au plus).

Exercice 2.1.6. — Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites *de rationnels* convergentes vers des rationnels ℓ et ℓ', alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell+\ell'$ (ce résultat sera généralisé dans le chapitre suivant).

► La raison pour laquelle nous venons de laisser en exercice à ce stade ces propriétés est qu'une fois la construction de $\mathbb{R}$ et de ses opérations effectuée, elles seront généralisées dans le chapitre suivant avec des outils beaucoup plus efficaces. Mais il est en réalité impératif pour la validité de la construction de démontrer ces propriétés avant de disposer des outils plus efficaces, d'où leur présence ici... ◄

Définition 2.1.7. — On dit que deux suites de *rationnels* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment **un couple de suites adjacentes** si les propriétés suivantes sont vérifiées :
1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante ;
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante ;
3. pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq v_n$;
4. la suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Les suites adjacentes sont les briques de base de la construction des opérations (addition, multiplication) de $\mathbb{R}$. L'idée sous-jacente à toute la construction a pour point de départ la propriété suivante.

Proposition 2.1.8. — *Les approximations décimales par défaut et par excès d'un réel x forment un couple de suites adjacentes (composées de décimaux) qui convergent vers x.*

Démonstration. — Soit x un réel et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de ses approximations décimales par défaut et par excès. Par construction, la première est croissante, la seconde décroissante et on a $x_n\leq x'_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. De plus, il est aisé de vérifier (faites-le !) avec la définition de la convergence que la suite $(x_n-x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $(10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit maintenant $I=]y,z[$ un intervalle ouvert contenant x. On note $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements décimaux de y et z et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celui de x. Comme $y<x$, il existe un entier p tel que $a_j=b_j$ pour tout $j\in\mathbb{N}$ tel que $j<p$ et $b_p<a_p$, et comme $x<z$, il existe un entier q tel que $a_j=c_j$ pour tout $j\in\mathbb{N}$ tel que $j<q$ et $a_q<c_q$. Alors, pour tout $n>p$,
$$y<x_n=a_0+\overline{0,a_1a_2...a_n}<z.$$
Le cas de $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se traite de manière analogue. □

Comme l'addition (ou la multiplication) des décimaux ne pose pas de problèmes (pas de « retenues infinies »), il « suffit » donc pour définir l'addition (ou la multiplication) de deux réels de commencer par additionner (ou multiplier) leurs approximations, puis de montrer que les suites obtenues convergent. Bien entendu cette dernière étape n'a rien d'évident et nécessite une preuve approfondie. La première étape, qui est la plus délicate[(2)], est la suivante.

Proposition 2.1.9. — *Soient $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de* décimaux *formant un couple de suites adjacentes. Alors il existe un* réel *x tel que les deux suites convergent vers x.*

Remarque 2.1.10. — Jusqu'à la fin de cette section 2.1.3 (et dans celle-là seulement), nous noterons maintenant les suites de réels $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec le rang n entouré de parenthèses et placé en exposant (et non pas en indice comme habituellement). La raison en est la suivante : un réel est lui-même une suite (son développement décimal), il est approximé par des suites (les approximations décimales par défaut et par excès), etc. Nous serons donc amenés à considérer, par exemple, le k-ième chiffre $a_k^{(n)}$ du développement décimal de $x^{(n)}$, ou son approximation décimale par défaut $x_k^{(n)}$ à 10^{-k} près...

[(2)] Il s'agit précisément de l'énoncé dont la preuve est erronée dans le livre de Daniel Perrin dont nous avons donné plus haut la référence ; ce point mis à part, il s'agit d'un excellent ouvrage dont nous recommandons la lecture.

► Attention ! Cette proposition affirme beaucoup plus que la Proposition 2.1.8 précédente : pour tout couple de suites adjacentes de décimaux (qui ne sont pas nécessairement des approximations par défaut et par excès de quelque chose !) il existe un réel (à déterminer) qui est la limite commune des deux suites.

Comme nous ne connaissons pas encore la limite (le but de la preuve est justement de montrer qu'elle existe !) il nous faut d'abord l'identifier avec précision. On montre donc que les coefficients des développements décimaux des termes des deux suites se « stabilisent » lorsque n devient grand, donnant ainsi naissance à un réel x qui sera leur limite commune (ce phénomène était évident dans le cas précédent où nous savions que les deux suites étaient les approximations par défaut et par excès d'un réel déjà connu). Subtilité supplémentaire, nous verrons dans la suite de la preuve qu'en réalité seul la suite « supérieure » $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ conduit à un développement propre donc à un réel ; il nous faut donc démontrer que l'autre suite donne naissance à un développement qui est soit propre et égal au précédent, soit impropre mais également relié au précédent.

Démonstration précise. — Nous commençons par noter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ les chiffres du développement décimal des réel $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$.

Etape 1. On prouve que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un entier N_i tel que pour tout n plus grand que N_i,

$$a_i^{(n)} = a_i^{(N_i)} \;\text{ et }\; b_i^{(n)} = b_i^{(N_i)}$$

(autrement dit, le i-ème chiffre de chaque développement est constant après le rang N_i, rang qui dépend évidemment de la place i du chiffre choisi). Pour cela, fixons un $i \in \mathbb{N}$ et notons $r_i^{(n)}$ l'approximation par défaut à 10^{-i} près de $x^{(n)}$; autrement dit

$$r_i^{(n)} = a_0 + \overline{0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} ... a_i^{(n)}}\ ,$$

et nous faisons de même pour $y^{(n)}$, ce qui donne naissance à une suite $s_i^{(n)}$ d'approximations par défaut des $y^{(n)}$. Alors $10^i r_i^{(n)} = E(10^i x^{(n)})$ pour tout n (ici E désigne la partie entière) et de même pour $s_i^{(n)}$. La croissance de la fonction partie entière, la monotonie des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et leur caractère adjacent assurent que $\left(10^i r_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée et $\left(10^i r_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, dont les termes sont des *entiers* (en fait des chiffres dès que $i \geq 1$). Nous laissons la preuve du résultat suivant au lecteur, ce qui conclut cette étape.

Lemme 2.1.11. — *Une suite croissante et majorée d'entiers est constante à partir d'un certain rang (on dit qu'elle est stationnaire), et de même pour une suite décroissante et minorée d'entiers.*

Etape 2. On note alors pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$a_i := a_i^{(N_i)} \;\text{ et }\; a_i' = b_i^{(N_i)}.$$

Ces deux suites vont nous servir à mettre en évidence le réel qui sera la limite commune des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. En premier lieu, montrons que la suite $(a_i)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être considérée comme un développement décimal propre, c'est-à-dire n'est pas formée que de 9 partir d'un cetrain rang. En effet, si $a_i' = a_{i+1}' = 9$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \leq N_{i+1}$,

$$10^{i+1} s_{i+1}^{(n)} \geq 10^{i+1} s_{i+1}^{(N_{i+1})}$$

(décroissance de cette suite lorsque n varie, déjà remarquée dans l'étape 1). Si n est compris entre N_i et N_{i+1}, cette inégalité se traduit par l'inégalité suivante entre deux entiers (donnés en écriture décimale) :

$$\overline{a_0' a_1' ... a_{i-1}' 9 b_{i+1}^{(n)}} \;\geq\; \overline{a_0' a_1' ... a_{i-1}' 99}\ ,$$

d'où l'on déduit que $b_{i+1}^{(n)} = 9$ pour tout n compris entre N_i et N_{i+1}, donc pour tout $n \geq N_i$ puisque la suite $\left(b_{i+1}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang N_{i+1}. Par récurrence, il est facile d'en déduire que s'il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_i' = 9$ pour tout $i \geq i_0$, alors

$$\forall i \geq i_0,\ \forall n \geq N_{i_0},\ b_i^{(n)} = 9.$$

Or, à n fixé, la suite $\left(b_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est le développement décimal de $y^{(n)}$ donc elle ne peut pas ne contenir que des 9 à partir d'un certain rang. On peut noter que l'on ne peut pas appliquer le même raisonnement à la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ car $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non décroissante, donc l'inégalité reliant les

$r_i^{(n)}$ est dans le « mauvais » sens et ne permet pas de conclure (un chiffre inférieur ou égal à 9 peut être différent de 9).

Etape 3. On montre maintenant que soit $a_i = a'_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait à la fois $a'_j = a_j$ pour tout $j < i_0$, $a'_{i_0} = a_{i_0} + 1$, et $a_k = 9$, $a'_k = 0$ pour tout $k > i_0$. L'inégalité clé est

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ x \le y \implies E(y) - E(x) \ \le\ E(y-x) + 1$$

(facile à montrer). On tire par exemple de cette inégalité que, pour $n \ge N_0$,

$$a'_0 - a_0 = E(y^{(n)}) - E(x^{(n)}) \le E(y^{(n)} - x^{(n)}) + 1$$

donc $a'_0 - a_0 \le 1$ en passant à la limite. Par croissance de la partie entière, on a de plus $a'_0 \ge a_0$. En conclusion, soit $a'_0 = a_0$, soit $a'_0 = a_0 + 1$.

On obtient alors par récurrence (aisée, en répétant ce raisonnement) que soit $a_i = a'_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a'_j = a_j$ pour tout $j < i_0$ et $a'_{i_0} = a_{i_0} + 1$. Il reste alors à montrer dans ce dernier cas que nous sommes en présence de deux développements (le propre et un impropre) du même réel. De fait, pour tout $n \ge N_{i_0+1}$,

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= 10^{-i_0}\, r_{i_0}^{(n)} + 10^{-(i_0+1)}\, a_{i_0+1} + \varepsilon, \\ y^{(n)} &= 10^{-i_0}\, s_{i_0}^{(n)} + 10^{-(i_0+1)}\, b_{i_0+1} + \eta \end{aligned}$$

où ε et η sont des rationnels plus petits que $10^{-(i_0+1)}$. Dès lors,

$$y^{(n)} - x^{(n)} \ = \ \frac{1}{10^{i_0}} \ + \ \frac{b_{i_0+1} - a_{i_0+1}}{10^{i_0+1}} \ + \ (\eta - \varepsilon),$$

d'où l'on tire, en réorganisant le terme de droite,

$$\begin{aligned} a_{i_0+1} - b_{i_0+1} &= 10^{i_0+1}\left(x^{(n)} - y^{(n)} + 10^{-i_0} + (\eta - \varepsilon)\right) \\ &= 10 \ - \ 10^{i_0+1}\left(x^{(n)} - y^{(n)}\right) \ + \ 10^{i_0+1}(\eta - \varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $(y^{(n)} - x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en restant positive, il existe un rang n tel que

$$0 \ \le \ y^{(n)} - x^{(n)} \ \le \ 10^{-(i_0+2)},$$

inégalité que l'on peut injecter dans la précédente pour obtenir

$$\begin{aligned} a_{i_0+1} - b_{i_0+1} &\ge \ 10 \ - \ 10^{i_0+1}.10^{-(i_0+2)} + \ 10^{i_0+1}(\eta - \varepsilon) \\ &\ge \ 10 \ - \ 10^{i_0+1}.10^{-(i_0+2)} - \ 10^{i_0+1}.10^{-(i_0+1)} \\ &\ge \ 10 \ - \ \frac{1}{10} \ - \ 1 = 9 \ - \ \frac{1}{10}\ . \end{aligned}$$

(l'inégalité intermédiaire obtenue en utilisant les informations connues sur ε et η). Comme a_{i_0+1} et b_{i_0+1} sont des chiffres, cette inégalité n'est possible que si $a_{i_0+1} = 9$ et $b_{i_0+1} = 0$. En utilisant le même argumentaire, on montre ensuite par récurrence que $a_k = 9$ et $b_k = 0$ pour tout $k > i_0$.

Etape 4. Soit maintenant x le réel dont le développement décimal est donné par $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$. D'après l'étape précédente, soit la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est égale à la suite $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, soit x est un décimal et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en est un développement impropre. Il ne reste plus qu'à prouver que x est la limite commune des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Mais cela s'ensuit facilement de la définition de x et de liens entre les suites $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. ◄

Une fois cette étape acquise, nous obtenons le résultat qui pilote le comportement des couples de suites adjacentes de *rationnels* (et non plus de décimaux) dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1.12. — *Soient $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de* rationnels *formant un couple de suites adjacentes. Alors il existe un* réel *x tel que les deux suites convergent vers x.*

Esquisse de démonstration. — Nous définissons deux nouvelles suites par $u_n = x_n^{(n)}$ et $v_n = y_n^{(n)}$, (autrement dit u_n est l'approximation décimale par défaut de $x^{(n)}$ à 10^{-n} près et v_n est l'approximation décimale par excès de $y^{(n)}$ à 10^{-n} près... attention à la coïncidence entre le n en indice et en exposant : pour chaque terme de la suite on gagne une puissance de 10 dans la qualité de l'approximation). On peut assez facilement montrer qu'elles forment un couple de suites adjacentes (attention, les propriétés de monotonie dans la définition des suites adjacentes ne sont pas si évidentes à démontrer).

D'après le résultat précédent, comme ces deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont formées de décimaux, elles convergent vers un réel que nous noterons désormais ℓ. Par ailleurs, en utilisant des raisonnements analogues à ceux indiqués plus haut (*cf*. Exercice 2.1.5), cette convergence implique celle de $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ puisque ces deux dernières suites diffèrent des précédentes de au plus 10^{-n}. □

2.2. Opérations

Nous appliquons maintenant notre programme afin de définir l'**addition**. Soient donc deux réels x et y et nous notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leurs suites respectives d'approximations décimales par défaut et par excès. On en déduit que $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n+y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un couple de suites adjacentes, en vertu du lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

Lemme 2.2.1. — *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un couple de suites adjacentes de rationnels (resp. de décimaux) et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en forment un autre, alors $(u_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n + t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment à leur tour un couple de suites adjacentes de rationnels (resp. de décimaux).*

Cela conduit immédiatement à la définition de l'addition.

Définition 2.2.2. — La limite commune des suites $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n + y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *résultat de l'addition de x et de y*. Elle est notée $x + y$.

Afin de s'assurer que cette construction a un sens, il ne nous reste plus qu'à s'assurer que lorsque l'on considère des rationnels (où l'addition est déjà connue), nous n'obtenons pas un résultat aberrant. De fait, le résultat de l'Exercice 2.1.6 garantit ce point.

On peut construire de la même manière l'**opposé** de n'importe quel réel. Si x est un réel et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ses suites d'approximations décimales par défaut et par excès, alors les suites $(-x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, prises dans cet ordre, forment à nouveau un couple de suites adjacentes (attention, il n'y a aucune raison pour qu'elles soient les approximations décimales d'un réel !) et leur limite commune est appelé *opposé de x*. Encore une fois, cette construction ne donne bien sûr rien de nouveau lorsqu'on l'applique à un rationnel. Cette construction permet évidemment d'obtenir immédiatement la **soustraction** des réels. Une fois celle-ci connue, nous pouvons donner une définition définitive de la notion centrale de ce chapitre.

Définition 2.2.3. — On dit que deux suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment **un couple de suites adjacentes** si les propriétés suivantes sont vérifiées :
1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante ;
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$;
4. la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

La construction de la **multiplication** se fait de la même manière mais est légèrement plus complexe en raison des subtilités dues aux signes des suites des approximations décimales (connaitre le signe de ces termes est impératif, par exemple, pour déterminer lesquelles des quatre suites $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x'_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doivent être prises pour former le couple de suites adjacentes souhaité). Un analogue de l'Exercice 2.1.6 permet alors de montrer que la multiplication ainsi construite est une extension de celle de $\mathbb{Q}$.

Exercice 2.2.4. — Donner les grandes étapes de la construction de la multiplication.

On peut enfin construire l'**inverse de n'importe quel réel non-nul**... à condition encore une fois d'être attentif. En premier lieu, on sera amené à considérer les suites dont les termes sont les inverses des approximations décimales du réel que l'on souhaite inverser. Il convient donc de s'assurer qu'elles ne présentent aucun risque de s'annuler. Par ailleurs, les termes de ces suites sont des inverses de décimaux donc en général pas des décimaux. Il faut donc utilisr le Théorème général 2.1.12 pour conclure à leur convergence, alors que nous nous étions contenté jusque là de la Proposition 2.1.9. Enfin, la compatibilité avec l'inverse des rationnels est également plus délicate. Une conséquence de l'existence de l'inverse est bien sûr la **division**.

Exercice (⋆) 2.2.5. — Donner les grandes étapes de la construction de l'inverse d'un réel non-nul.

2.3. Le corps $\mathbb{R}$

Les principales propriétés de l'ensemble des nombres réels que nous venons de définir sont résumées dans les énoncés suivants (dont une petite partie nécessite des preuves faciles et qui sont encore une fois laissées au lecteur consciencieux).

Théorème 2.3.1. — *L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, c'est-à-dire que :*

1. *l'addition et la multiplication sont associatives et commutatives ;*
2. *l'addition possède un élément neutre* 0, *et tout élément de $\mathbb{R}$ possède un opposé ;*
3. *la multiplication possède un élément neutre* 1, *et tout élément non-nul de $\mathbb{R}$ possède un inverse ;*
4. *la multiplication est distributive sur l'addition.*

Théorème 2.3.2. — *Le corps $\mathbb{R}$ possède un ordre, qui est l'ordre lexicographique sur les développements décimaux. L'ordre est compatible avec l'addition et la mutiplication au sens où*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+,\ x + y' \geq 0 \ \text{ et } \ xy \geq 0.$$

De plus, $\mathbb{R}$ est un corps archimédien, c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \geq y$.

Théorème 2.3.3. — *Le corps $\mathbb{R}$ des réels contient le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Ce dernier est dense dans $\mathbb{R}$ (*cf. *la Proposition 2.1.2).*

Théorème 2.3.4. — *Tout couple de suites de réels formant un couple de suites adjacentes possède une limite commune.*

Les pages qui précèdent ont décrit *une* construction du corps $\mathbb{R}$. En réalité on peut montrer que tous les ensembles possédant les mêmes propriétés que $\mathbb{R}$ sont « équivalents » (voir par exemple le livre de Daniel Perrin déjà cité pour un énoncé plus détaillé).

Par ailleurs, il faut bien mesurer l'importance du Théorème 2.3.4. La singularité de l'ensemble des nombres réels vient en effet de cette propriété (on peut noter par exemple que le corps $\mathbb{Q}$ lui-même vérifie

toutes les propriétés énoncées dans les trois autres théorèmes). Il s'agit de ce que l'on appelle souvent *la propriété caractéristique de* $\mathbb{R}$. Nous verrons au chapitre suivant qu'il existe plusieurs formulations possibles de cette propriété caractéristique, et que chacune d'entre elles fournit un outil essentiel pour l'analyse. Ce n'est en effet que dans $\mathbb{R}$ que les techniques classiques de l'analyse (parmi lesquelles l'étude des limites, donc toutes les considérations découlant de celles-ci comme la continuité, la dérivabilité, etc.) peuvent fonctionner. Nous verrons de multiples exemples de ce phénomène par la suite, parmi lesquels on peut déjà citer le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème des accroissements finis.

Exercices. —

Exercice 2.3.5. — Montrer qu'il est impossible qu'il existe un élément x de $\mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$ (cet exercice est la formulation correcte de la propriété « $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel »).

Exercice 2.3.6. — Même exercice avec $\sqrt{p}$ pour p un entier *premier*. Pourquoi ne peut-on pas généraliser à $\sqrt{n}$ avec n entier arbitraire ?

Exercice 2.3.7. — On rappelle que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres irrationnels**. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (*cf.* la Proposition 2.1.2 pour la définition de « dense » utilisée ici).

Exercice 2.3.8. — Montrer que l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{p}{2^n}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.3.9. — Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On définit les suites $u = (u_n)_{n\geq 1}$ et $v = (v_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}}.$$

Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Exercice (⋆) 2.3.10. — Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. *Indication* : on pourra raisonner par l'absurde et supposer que $\mathbb{R}$ est dénombrable donc ranger ses éléments dans une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis faire intervenir un réel x tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le k-ième chiffre du développement décimal de x n'est pas égal au k-ième chiffre du développement décimal de u_k.

Exercice 2.3.11. — Déduire de l'exercice précédent que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$ (utiliser aussi l'exercice 1.4.12).

Exercice (⋆) 2.3.12. — Montrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (*indication* : utiliser les développements en base 2 et les fonctions caractéristiques).

CHAPITRE 3

LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

Ce chapitre constitue le coeur du cours. La notion de limite d'une suite ou d'une fonction numérique) est en effet le concept le plus important de l'analyse, sur lequel repose un grand nombre d'outils et de notions comme la dérivation, l'intégration, etc.

Par rapport à l'enseignement du premier semestre, l'accent est mis ici sur la compréhension conceptuelle, sur la précision des énoncés et sur la rigueur des démonstrations plutôt que sur la technique d'utilisation.

Nous retiendrons du chapitre précédent les propriétés des nombre réels : l'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, ordonné et archimédien, et tout couple de suites adjacentes converge vers une limite commune. Nous avons donné au chapitre précédent une première définition de la convergence d'une suite. Notre objectif est ici de développer abondamment cette notion.

3.1. Limites de suites

3.1.1. Définitions. — En guise d'introduction, rappelons qu'une suite d'élements de $\mathbb{R}$ (on dit aussi **suite numérique**) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite qui est donnée par l'application

$$\begin{aligned} u \ : \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n. \end{aligned}$$

Définition 3.1.1. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$.

Cette définition donne une interprétation précise des phrases floues du type « la suite se rapproche de ℓ lorsque n tend vers l'infini ». Concrètement, dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ consiste à affirmer une propriété « d'approximation » : quelle que soit la précision que l'on se donne (le nombre $\varepsilon > 0$), il suffit d'attendre sufisamment longtemps pour trouver un instant à partir duquel toutes les valeurs de la suite se trouvent à distance plus petite que ε de ℓ (sont une approximation de ℓ à ε près).

***Proposition 3.1.2* (unicité de la limite)**. — *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite, et* ℓ *et* ℓ' *des réels. Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *et vers* ℓ'*, alors* $\ell = \ell'$.

Démonstration. — Par l'absurde, supposons $\ell \neq \ell'$ et posons $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{2}$. Alors, d'après la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nous pouvons faire de même avec ℓ', ce qui nous donne un N' tel que pour tout $n \geq N'$,

$$|u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Ainsi, par inégalité triangulaire, pour $n \geq \max(N, N')$,

$$|\ell - \ell'| \ = \ |(\ell - u_n) - (u_n - \ell')| \ \leq \ |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \ \leq \ 2\varepsilon \ < \ |\ell - \ell'|.$$

Comme $|\ell - \ell'| \neq 0$, ceci est impossible et nous avons bien obtenu la contradiction souhaitée. □

Remarque 3.1.3. — On notera que cette preuve repose sur deux éléments qui jouent un rôle très important dans l'analyse :

1. l'inégalité triangulaire, outil essentiel d'**estimation** (majoration, minoration) :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ |a + b| \leq |a| + |b|$$

(qui est une conséquence de la compatibilité entre les opérations et l'ordre) ;

2. la remarque suivante, d'aspect banal mais qu'il importe de bien comprendre : si un réel x vérifie « $\forall\varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon$ », alors $x = 0$ (exercice).

La négation de la propriété de convergence vers le réel ℓ est

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \text{ tel que } |u_n - \ell| \geq \varepsilon\,.$$

Elle signifie donc qu'il existe une distance (un $\varepsilon > 0$) telle que, aussi longtemps qu'on attende, on trouvera toujours des valeurs de la suite en-dehors de la bande $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Attention au vocabulaire : on dit qu'**une suite est convergente** lorsqu'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ (au sens de la définition précédente). Autrement dit,

$$\exists\ell \in \mathbb{R},\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** : cela signifie donc qu'*il n'existe pas de réel* ℓ tel que la propriété précédente soit vérifiée. Autrement dit,

$$\forall\ell \in \mathbb{R},\ \exists\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \text{ tel que } |u_n - \ell| \geq \varepsilon\,.$$

Il existe de multiples façons pour une suite de diverger.

Définition 3.1.4. — On dit qu'une suite **tend (ou diverge) vers** $+\infty$ (resp. diverge vers $-\infty$) si

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ u_n > A$$

(resp. $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ u_n < -A$).

Attention une fois encore au vocabulaire : *diverger* et *diverger vers* $\pm\infty$ sont deux choses différentes. Une suite qui diverge vers $+\infty$ est une suite divergente, mais une suite divergente peut très bien ne pas « diverger vers $\pm\infty$ » !

3.1.2. Opérations sur les limites de suites. — Les propriétés suivantes sont bien connues, mais leur preuve nécessite d'utiliser la définition précise de la convergence.

Proposition 3.1.5. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel ℓ. Alors*
1. *la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$;*
2. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.*

Proposition 3.1.6. — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites convergentes respectivement vers des réels ℓ et ℓ'. Alors,*
1. *la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$;*
2. *la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.*

Proposition 3.1.7. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel $\ell \neq 0$. Alors, il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, u_n \neq 0$, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq N}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.*

Remarque 3.1.8. — Il est important de noter dans la dernière propriété qu'il n'y a aucune raison pour que u_n soit non-nul pour tout n entier. En revanche, le fait que $\ell \neq 0$ entraîne l'existence d'un entier N tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$; en conséquence, il est toujours possible de considérer la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq N}$, oubliant ainsi uniquement un nombre fini de termes.

Preuve de la Proposition 3.1.5. — 1. Prenons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Pour $n \geq N$, on a alors

$$\big|\,|u_n| - |\ell|\,\big| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$$

(nous utilisons ici l'inégalité dérivée de l'inégalité triangulaire $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b|$ pour tous a et b réels). Nous venons donc de prouver qu'il existe un $N' \in \mathbb{N}$ (que l'on peut, ici, prendre égal à N) tel que pour tout $n \geq N'$,

$$||u_n| - |\ell|| < \varepsilon.$$

La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $|\ell|$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à prouver (une suite constante est convergente), nous supposons donc $\lambda \neq 0$. De la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tire alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda|\,|u_n - \ell| < |\lambda|\,\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

et $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $\lambda\ell$. □

Preuve de la Proposition 3.1.6. — 1. Soit $\varepsilon > 0$. De la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ e ℓ', on tire qu'il existe deux entiers N et N' tels que

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N', |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N')$,

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Nous commençons par montrer que si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergentes vers 0, alors $(s_nt_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, comme précédemment, il existe deux entiers N et N' tels que

$$\forall n \geq N, |s_n| < \sqrt{\varepsilon}, \quad \forall n \geq N', |t_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

et donc pour tout $n \geq \max(N, N')$,

$$|s_nt_n| < \varepsilon.$$

La suite $(s_nt_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers 0. Prenons maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites convergentes vers ℓ et ℓ' respectivement. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = u_n - \ell \text{ et } t_n = v_n - \ell'.$$

Ces deux suites tendent vers 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = s_n + \ell$, $v_n = t_n + \ell'$ et $u_nv_n = s_nt_n + \ell t_n + \ell' s_n + \ell\ell'$. Or le préliminaire nous apprend que $(s_nt_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et la Proposition précédente que $(\ell t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ell' s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent également vers 0. On en déduit que $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$. □

Preuve de la Proposition 3.1.7. — Nous démontrerons plus loin (Proposition 3.1.9) l'existence de l'entier N tel que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\geq N}$ soit bien définie. Par ailleurs, $\frac{1}{\ell}$ existe. Comme précédemment, on commence par un préliminaire, qui est le cas $\ell = 1$. Dans ce cas, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $|u_n - 1| < \frac{1}{2}$, ce qui implique que pour tout $n \geq N_0$, $u_n > \frac{1}{2}$. Prenons maintenant $\varepsilon > 0$, il existe donc un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N_0, N_1)$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - 1\right| = \left|\frac{u_n - 1}{u_n}\right| = \frac{|u_n - 1|}{|u_n|} < 2\,\frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Appliquons maintenant cela au cas général : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel ℓ et qui satisfait (i) et (ii). Alors $(\frac{u_n}{\ell})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, d'où l'on tire que $(\frac{\ell}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers 1. En conclusion, $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. □

La définition précise de la limite que nous avons énoncée et ses propriétés permettent de justifier (éventuellement avec un peu d'efforts) toutes les limites classiques connues depuis le secondaire (voir les exercices pour des exemples).

3.1.3. Limites et inégalités. —

Nous énonçons ici trois résultats extrêmement importants (autant par leurs contenus que par les méthodes utilisées dans les preuves).

Proposition 3.1.9. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell > 0$. Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > 0$.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et donc il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon = \frac{\ell}{2}$, ce qui est équivalent à $-\frac{\ell}{2} < u_n - \ell < \frac{\ell}{2}$. On en déduit que pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \frac{\ell}{2} < u_n < \ell + \frac{\ell}{2},$$

et donc pour tout $n \geq N$, $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$. □

Remarque 3.1.10. — La preuve de cet énoncé fournit l'élément manquant dans la preuve de la Proposition 3.1.7. Il peut d'ailleurs être renforcé de la manière suivante (preuve laissée au lecteur) : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite $\ell > 0$ et $0 < a < \ell$, alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq a$. Bien entendu, ces énoncés vaut aussi pour les suites dont la limite est strictement négative en inversant le sens des inégalités.

Rappelons maintenant qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et **bornée** s'il existe un réel A tel que $|u_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette dernière propriété est équivalente à : il existe deux réels a et b tels que $a \leq u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.1.11. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors elle est bornée.*

Démonstration. — Appelons ℓ la limite de la suite et prenons $\varepsilon = 1$. De la convergence on tire l'existence d'un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < 1$, ce qui est équivalent à $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Considérons alors $A_1 = \max(|\ell - 1|, |\ell + 1|)$ et $A_2 = \max(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|)$ (ce nombre existe puisqu'il s'agit de la plus grande parmi un nombre fini de valeurs). Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Alors de deux choses l'une : ou bien $n \geq N$ et dans ce cas $|u_n| \leq A_1$, ou bien $n < N$ et dans ce cas $|u_n| \leq A_1$. En conclusion, si on note $A = \max(A_1, A_2)$, on a $|u_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Nous renevrsons finalement la perspective : les deux énoncés précédents extrayaient de la convergence de la suite des informations sur les termes de la suite. Nous montrons maintenant comment une information sur les termes de la suite implique un contrôle de la limite.

Proposition 3.1.12. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ, et soit $a \in \mathbb{R}$. Si $u_n \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell \geq a$.*

Démonstration. — Par l'absurde, supposons que $\ell < a$. On considère alors une nouvelle suite définie par $v_n = a - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle converge vers $a - \ell$ qui est donc strictement positif. On peut alors appliquer la proposition précédente, qui affirme l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n > 0$, c'est-à-dire $u_n < a$. Contradiction ! □

Remarque 3.1.13. — Cet énoncé appelle plusieurs remarques. En premier lieu, si l'hypothèse est renforcée en « $u_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ », la conclusion n'est pas renforcée pour autant : on ne peut pas obtenir mieux que $\ell \geq a$. Autrement dit : une inégalité stricte sur les termes de la suite se transforme touijours en une inégalité large à la limite ! En guise de contre-exemple, le lecteur méditera le cas de la suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En deuxième lieu, il n'est pas nécessaire que $u_n \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réalité (exercice), il suffit qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq a$ pour tout $n \geq N$. Enfin, comme précédemment, un résultat similaire est obtenu si l'hypothèse est de la forme $u_n \leq b$ en renversant le sens des inégalités.

Exercices. —

Exercice 3.1.14. — Soit $x_n = \frac{n-6}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner N explicite tel que $\forall n \geq N$, $|x_n - 1| < 10^{-6}$.

Exercice 3.1.15. — Montrer soigneusement que la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n^3+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tend vers 0.

Exercice 3.1.16. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{e^{-2n}+1}{2e^{-2n}-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$; trouver un entier N explicite en fonction de ε tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n + 1| < \varepsilon$. En déduire soigneusement que (u_n) tend vers -1 si n tend vers l'infini.

Exercice 3.1.17. — Montrer qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est une suite divergente.

Exercice 3.1.18. — Prouver les faits suivants.

1. La suite définie par $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini.
2. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.
3. La suite définie par $u_n = \ln n$ diverge.

***Exercice 3.1.19* (théorème des gendarmes)**. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites, telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Si de plus $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 3.1.20. — Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (Justifier par une démonstration où un contre-exemple) : (a) toute suite convergente est bornée ; (b) toute suite bornée est convergente ; (c) toute suite périodique est bornée ; (d) toute suite périodique est divergente. (On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ t.q. pour tout entier n, $u_{n+p} = u_n$.)

Exercice 3.1.21. — On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $|x - a| < \varepsilon$. Montrer que si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite d'éléments de A convergente vers x.

Exercice 3.1.22. — En utilisant la construction de $\mathbb{R}$ donnée au chapitre précédent, montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.1.23. — Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Autrement dit, on peut utiliser tout aussi bien (ii) pour définir le fait qu'une suite converge vers ℓ. Montrer en revanche qu'elles ne sont pas équivalentes à

(iii) $\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Exercice 3.1.24. — Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < 2\varepsilon$;

(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < a\,\varepsilon$.

Exercice 3.1.25. — Soit $P(\varepsilon)$ une assertion dans laquelle apparait une variable (non-muette) réelle ε. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes : (i) $\forall \varepsilon > 0, P(\varepsilon)$, et ($ii$) $\forall \varepsilon > 0, P(2\varepsilon)$.

Exercice 3.1.26. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Montrer que la suite est croissante.

b. Prouver que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et conclure que la suite converge.

***Exercice 3.1.27* (théorème de Cesarò)**. — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On définit la suite c par

$$c_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que si u est convergente de limite 0, alors c est convergente de limite 0, puis étendre au cas d'une limite quelconque. Que dire de c quand u tend vers $+\infty$? Et lorsque u diverge, c diverge-t-elle ?

Exercice 3.1.28. — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit les *suites dérivées* $u^{(k)} = \left(u_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u'_n = u_{n+1} - u_n, \quad u''_n = u'_{n+1} - u'_n, \quad \ldots, \quad u_n^{(k+1)} = u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}.$$

a. Exprimer $u_n^{(k)}$ en fonction de $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k}$.

b. Calculer $a^{(k)}$ pour la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = P_m(n)$ où : $P_m(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-m+1)}{m!}$ (on pourra remarquer que $P_{m+1}(X+1) - P_{m+1}(X) = P_m(X)$).

c. Montrer que la suite (u_n) est polynomiale si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{(k)} = 0$.

3.2. Borne supérieure

Commençons par rappeler quelques éléments importants de vocabulaire, que nous avons déjà écrits mais qu'il est bon de répéter. **Si A est une partie de $\mathbb{R}$**,

1. on dit que A est **majorée** s'il existe un élement M de $\mathbb{R}$ tel que $a \leq M$ pour tout a de A ;
2. un élément M de $\mathbb{R}$ tel que $a \leq M$ pour tout a de A s'appelle un **majorant** de A ;
3. un **plus grand élément** de A est un minorant de A qui est dans A ;
4. on dit que A est **minorée** s'il existe un élement m de $\mathbb{R}$ tel que $a \geq m$ pour tout a de A ;
5. un élément m de $\mathbb{R}$ tel que $a \geq m$ pour tout a de A s'appelle un **minorant** de A ;
6. un **plus petit élément** de A est un minorant de A qui est dans A ;
7. on dit que A est **bornée** s'il existe un élement C de $\mathbb{R}$ tel que $|a| \leq C$ pour tout a de A ; cette propriété est équivalente à : il existe deux élements C_1 et C_2 de $\mathbb{R}$ tel que $C_1 \leq a \leq C_2$ pour tout a de A.

Toutes les parties de $\mathbb{R}$ ne sont pas majorées, minorées ou bornées. Même parmi celles qui sont (par exemple) majorées, il n'existe pas nécessairement de plus grand élément (exemple : $A = [0, 1[$). Une propriété très particulière de $\mathbb{R}$ est que même s'il n'existe pas de plus grand élémént, il existe quand même un réel qui est « le meilleur (le plus précis) des majorants possibles ». De plus, l'existence de ce réel est une propriété caractéristique de $\mathbb{R}$ au même titre que la convergence des couples de suites adjacentes (par exemple, la partie de $\mathbb{Q}$ donnée par $\{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$ n'a pas de borne supérieure *dans* $\mathbb{Q}$).

Théorème 3.2.1. — *Soit A une partie* non-vide et majorée *de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble formé de tous les majorants de A a un plus petit élément.*

Définition 3.2.2. — Soit A une partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$. Le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A est appelé **borne supérieure de** A et est noté $\sup A$.

Remarque 3.2.3. — Si B est une partie non-vide et *minorée* de $\mathbb{R}$, alors on dispose bien sûr de la notion symétrique de **borne inférieure**, qui est le plus grand élémént de l'ensemble des minorants de B

Preuve du Théorème 3.2.1. — Soit A une partie *non-vide et majorée* de $\mathbb{R}$. Nous allons construire par récurrence un couple de suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *adjacentes*, qui vérifient les propriétés suivantes :
1. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$;
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n$ est un majorant de A ;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_0 - y_0|$.

Pour $n = 0$, il suffit de prendre $x_0 \in A$ (possible car elle est non-vide) et y_0 un majorant de A (possible car A est majorée).

Supposons maintenant les deux suites construites jusqu'au cran n et montrons que nous pouvons construire x_{n+1} et y_{n+1} vérifiant les propriétés voulues. Soit c le milieu du segment $[x_n, y_n]$.
– Si c est un majorant de A, on pose $y_{n+1} = c$ et $x_{n+1} = x_n$. On alors $x_n = x_{n+1} \leq c = y_{n+1} \leq y_n$, et de plus $|x_n - y_n| = \frac{1}{2}|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|x_0 - y_0|$.
– Si c n'est pas un majorant de A, alors il existe $a \in A$ tel que $a > c$. Comme y_n est un majorant de A, on a de plus $a \leq y_n$. Alors on pose $y_{n+1} = y_n$ et $x_{n+1} = a$. On alors $x_n \leq c < x_{n+1} = a \leq y_{n+1} = y_n$ et de plus $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|x_0 - y_0|$.

Nous avons donc construit ainsi un couple de suites adjacentes, qui possède donc une limite commune ℓ (propriété caractéristique de $\mathbb{R}$). Il reste à montrer que ℓ est un majorant de A et que c'est le plus petit des majorants. De fait, soit d'abord $a \in A$. Alors $y \leq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car ce sont des majorants), donc $\ell \geq a$ (passage à la limite d'une inégalité), ce qui indique exactement que ℓ est un majorant de A. Soit maintenant b un majorant de A. Alors $x_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \leq b$. Donc il existe un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A qui est précisément ℓ. □

Exemple. — On étudie $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors A est non-vide et bornée (majorée et minorée). Elle admet donc une borne inférieure (qui vaut 0 et n'est pas dans A) et une borne supérieure (qui vaut 1 et qui est en fait le plus grand élément de A)

Le résultat suivant est une *caractérisation* commode de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.4. — *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\ell = \sup A$ *;*

(ii) *ℓ est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $\ell - \varepsilon < a$.*

Démonstration. — Dans le sens direct, d'abord, si $\ell = \sup A$ alors ℓ est un majorant de A. Soit de plus $\varepsilon > 0$, alors $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A (car il est strictement inférieuer à ℓ) donc il existe $a \in A$ tel que $\ell - \varepsilon < a$ (on notera au passage que $a \leq \ell$ puisque ℓ est un majorant). Réciproquement, il suffit de démontrer qu'un réel ℓ vérifiant *(ii)* est le plus petit des majorants de A. De fait, soit m un majorant de A et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\ell - \varepsilon < a$ (seconde partie de la propriété *(ii)*), donc $\ell - \varepsilon < a \leq b$. Cet argument montre que pour tout $\varepsilon > 0$, $b - \ell > -\varepsilon$, ce qui implique que $b - \ell \geq 0$. □

Cela peut être réinterprété de la manière suivante (preuve laissée en exercice).

Proposition 3.2.5. — *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre* (i) *ℓ est la borne supérieure de A et* (ii) *ℓ est un majorant de A et il existe une suite croissante de points de A qui converge vers ℓ.*

Une conséquence de ces résultats est :

***Corollaire 3.2.6* (Convergence des suites monotones)**. — *Une suite* croissante et majorée *converge. De même, une suite* décroissante et minorée *converge.*

Démonstration. — Si toutes les suites croissantes majorées convergent, alors toutes les suites décroissantes minorées convergent en passant à l'opposé. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée ; nous appelons U l'ensemble des *valeurs prises par la suite, i.e.*

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = u_n\}.$$

Cet ensemble est évidemment non-vide et majoré par n'importe quel majorant de la suite. Donc il admet une borne supérieure ℓ.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation plus haut, il existe $w \in U$ tel que $\ell - \varepsilon < w$, ce qui, par définition de U, peut se récrire comme suit : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$. Comme la suite est croissante, on a de plus $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell$ pour tout $n \geq n_0$. Nous avons donc trouvé un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. □

Remarque 3.2.7. — On peut en fait démontrer à l'aide de ce dernier résultat que la convergence des couples de suites adjacentesvers une limite commune et l'existence d'une borne supérieure pour toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ sont des propriétés *équivalentes*. En effet, les deux suites sont convergentes (car croissante majorée, resp. décroissante minorée) et comme leur différence tend vers 0, les limites doivent être égales. Nous retiendrons donc que **l'existence d'une borne supérieure pour toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ est donc une propriété *caractéristique* de $\mathbb{R}$ au même titre que la convergence des suites adjacentes**.

Exercices. —

Exercice 3.2.8. — Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier la limite de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la valeur de a.

Exercice 3.2.9. — Donner les bornes supérieures, inférieures, plus grand élément, plus petit élément (s'ils existent) des parties suivantes de $\mathbb{R}$:

a. $[0, 1]$;
b. $[0, 1[$;
c. $]0, 1[$;
d. $[1, +\infty[$;
e. $\mathbb{N}$;
f. $\mathbb{Q}$;
g. $\{\frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\}$;
h $\{\frac{(-1)^n}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 3.2.10. — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

a. Montrer que u est monotone (c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante) et converge.
b. Majorer u_{2n} avec u_n, puis déterminer la limite de u.

Exercice 3.2.11. — Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors $A + B$ l'est aussi et : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 3.2.12. — Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall\varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B$ tels que $|a - b| < \varepsilon$ et $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b$. Montrer que $\sup A = \inf B$.

Exercice 3.2.13. — Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \exists\,(a, b) \in A^2,\ a < x < b, \\ \forall (a, b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.2.14. — Soit J une partie non-vide de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété

$$\forall x \in J,\ \forall y \in J, [x, y] \subset J.$$

Montrer que J est un intervalle (*indication* : on pourra distinguer suivant que J est majoré ou non, minoré ou non, et si oui suivant que sa borne supérieure ou inférieure est ou non dans J).

Exercice 3.2.15. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *bornée* et telle que $2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

a. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
b. Enn déduire que la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut nécessairement 0.

Exercice 3.2.16. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+p} \leq u_n + u_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que pour tous $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+kp} \leq u_n + ku_p$.
b. On suppose que $\inf\{\frac{u_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 0$; montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.
c. On suppose que $\inf\{\frac{u_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \ell$; montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

3.3. Limites de fonctions

3.3.1. Limites en un point. — Les considérations précédentes s'appliquent également à des fonctions. Cependant, si f est une fonction numérique (c'est-à-dire définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$), un préliminaire indispensable consiste à comprendre en quels points on peut prendre une limite. La question ne se pose pas pour une suite, puisque la seule limite que nous pouvions considérer était nécessairement lorsque n tendait vers $+\infty$.

Définition 3.3.1. — Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que a est **adhérent** à A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } |x - a| < \varepsilon.$$

Autrement dit, a est un point adhérent de la partie A s'il existe des points de A à distance aussi petite que l'on veut de a. En particulier, les points de A eux-mêmes sont bien évidemment adhérents à A. Les seules limites que l'on puisse considérer pour une fonction sont

– les limites en les points adhérents à son domaine de définition, et
– les limites éventuelles en $\pm\infty$, que nous étudierons un peu plus loin.

En effet, dire qu'un point a est adhérent au domaine de définition d'une fonction f signifie que l'on trouve des points du domaine de définition « aussi près que l'on veut » du point a. Autrement dit, la fonction f n'est peut-être pas définie en a mais elle l'est à proximité immédiate. L'intérêt de cette définition est de traiter dans un même cadre les limites de f en les points qui sont dans son domaine de définition et en des points qui ne sont pas dans le domaine de définition mais qui y sont adhérents. L'exemple typique de cette dernière situation est le cas où le domaine de définition est un intervalle ouvert à une de ses extrêmités et où l'on veut étudier la limite de la fonction en cette extrêmité.

Définition 3.3.2. — Soit f une fonction numérique, x_0 un point adhérent au domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et ℓ un réel. On dit que **la fonction f converge vers ℓ lorsque x tend vers x_0** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Autrement dit, f converge vers ℓ lorsque x tend vers x_0 si, chaque fois que l'on choisit une bande ouverte de valeurs autour de ℓ (ou encore un invtervalle de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$), il existe un intervalle ouvert autour de x_0 dont l'image par la fonction f est à l'intérieur de la bande $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Il est important de comprendre ce qui signifie « ne pas converger vers ℓ ». Formellement, cela s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0 \ \textit{tel que}\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \textit{tel que}\ |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Autrement dit, il existe une distance $\varepsilon > 0$ telle que, aussi près que l'on se situe de x_0, il y a des points qui sont envoyés par f en-dehors de la bande $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Exemple. — La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas pour limite $\ell = 0$ lorsque x tend vers 0. En effet, il existe une suite de points tendant vers 0 donnée par $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-1}$ et telle que $f(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on peut prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$, par exemple, et on alors pour tout $\delta > 0$ un point (choisi parmi les x_n) dans $]0, \delta[$ dont l'image par f vaut 1, donc est à distance au moins $\frac{1}{2}$ de 0.

Remarque 3.3.3. — La définition de la limite appelle plusieurs commentaires.

1. Tout d'abord, il est à remarquer que si x_0 est un point du domaine de définition de f, et si f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, alors nécessairement $\ell = f(x_0)$. En effet, fixons donc un $\varepsilon > 0$. Alors l'existence de la limite implique qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que l'image par f de $\mathcal{D}_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$ soit contenue dans $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$. Comme x_0 lui-même est dans $\mathcal{D}_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$, on en déduit que $f(x_0)$ doit être dans $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$. De plus, cette propriété est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ donc $f(x_0) = \ell$. Ainsi la question de la convergence d'une fonction f en un point x_0 du domaine de définition se résume à l'alternative suivante : soit la fonction converge vers $f(x_0)$, soit la fonction ne converge pas !
2. Il arrive néanmoins que des fonctions aient un comportement tel autour d'un point de leur domaine de définition que l'on ait envie de dire qu'elle converge vers quelque chose de différent de $f(x_0)$. C'est le cas par exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Comme nous venons de le voir, il n'est pas possible d'affirmer que la limite en 0 vaut 0 avec notre définition de la limite (la seule limite qui peut exister vaut nécessairement $f(0)$ c'est-à-dire 1). La bonne notion de limite est la limite **épointée** : on dit que **la fonction f converge vers ℓ lorsque x tend vers x_0 avec $x \neq x_0$** et on note $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = \ell$ si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que }\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[,\ (x \neq x_0 \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon),$$
ce qui s'écrit également
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que }\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\},\ |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$
Bien entendu, cette notion n'a de sens que si x_0 est dans le domaine de définition de f. Si ce n'est pas le cas, la limite épointée et la limite usuelle coïncident.
3. De la même façon que l'on a défini la limite épointée en se limitant aux éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$, on peut également définir des limites à droite et à gauche : **la fonction f converge à gauche vers ℓ lorsque x tend vers** x_0, ce qu'on note $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\leq x_0}} f(x) = \ell$, si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que }\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0-\delta, x_0],\ |f(x)-\ell| < \varepsilon,$$
et **la fonction f converge à droite vers ℓ lorsque x tend vers** x_0, ce qu'on note $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\geq x_0}} f(x) = \ell$, si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que }\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [x_0, x_0+\delta[,\ |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$
Il existe évidemment des versions épointées de ces deux notions en remplaçant $x \leq x_0$ par $x < x_0$ et $x \geq x_0$ par $x > x_0$.

Exemple. — Reprenons le même exemple que précédemment : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$, et ajoutons-y que cette fois-ci $f(0) = 0$. D'après le 1 de la Remarque 3.3.3, f n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 (puisque cette limite ne peut être que 0 si elle existe, or nous avons déjà vu que f n'admet pas 0 comme limite lorsque x tend vers 0). Nous pouvons nous demander maintenant si elle admet une limite *épointée* lorsque x tend vers 0. En réalité, ce n'est toujours pas le cas, car pour tout ℓ dans $\mathbb{R}$, nous pouvons trouver des points aussi proches que l'on veut de 0 et *distincts de* 0 dont l'image est à distance au moins $\frac{1}{2}$ de ℓ (exercice).

3.3.2. Opération sur les limites de fonctions en un point. — Comme précédemment, les propriétés suivantes sont bien connues.

Proposition 3.3.4. — *Soit f une fonction, x_0 un point adhérent à son domaine de définition, et un réel ℓ tel que f converge vers ℓ lorsque x tend vers x_0. Alors*
1. *la fonction $|f|$ converge vers $|\ell|$ lorsque x tend vers x_0 ;*
2. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf converge vers $\lambda\ell$ lorsque x tend vers x_0.*

Proposition 3.3.5. — *Soient f et g deux fonctions, x_0 un point adhérent à l'intersection de leurs domaines de définition et des réels ℓ et ℓ' tels que f et g convergent respectivement vers ℓ et ℓ' lorsque x tend vers x_0. Alors,*
1. *la fonction $f+g$ (définie sur l'intersection des domaines de définition) converge vers $\ell+\ell'$ lorsque x tend vers x_0 ;*
2. *la fonction fg (définie de même) converge vers $\ell\ell'$ lorsque x tend vers x_0.*

Proposition 3.3.6. — *Soit f une fonction, x_0 un point adhérent à son domaine de définition, et un réel $\ell \neq 0$ tel que f converge vers ℓ lorsque x tend vers x_0. Alors il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout x dans $D_f \cap]x_0-\sigma, x_0+\sigma[$, $f(x) \neq 0$, et la fonction $\frac{1}{f}$ (définie sur $D_f \cap]x_0-\sigma, x_0+\sigma[$) converge vers $\frac{1}{\ell}$ lorsque x tend vers x_0.*

Preuve de la Proposition 3.3.4. — 1. Prenons une fonction f convergente vers un réel ℓ en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $|f(x)-\ell| < \varepsilon$. Pour $x \in D_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$, on a alors comme précédemment $\big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x)-\ell| < \varepsilon$, donc $(|f|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

2. Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à prouver. Sinon, soit $\varepsilon > 0$. De la convergence de f on tire alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $|f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ainsi, pour tout $x \in D_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$,

$$|\lambda f(x) - \lambda\ell| = |\lambda|\,|f(x)-\ell| < |\lambda|\,\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

et λf converge bien vers $\lambda\ell$. □

Preuve de la Proposition 3.3.5. — 1. Soit $\varepsilon > 0$. De la convergence de f et g vers ℓ e ℓ', on tire qu'il existe deux réels $\delta > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$\forall x \in D_f \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[,\ |f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}\ ; \quad \forall x \in D_g \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[,\ |g(x)-\ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, en posant $\rho = \min(\delta, \eta)$, on a pour tout $x \in D_f \cap D_g \cap]x_0-\rho, x_0+\rho[$,

$$|f(x)+g(x)-(\ell+\ell')| \leq |f(x)-\ell| + |g(x)-\ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Nous commençons par montrer que si h et k sont des fonctions convergentes vers 0 lorsque x tend vers x_0, alors hk converge vers 0 lorsque x tend vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, comme précédemment, il existe deux réels $\delta > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$\forall x \in D_h \cap]x_0-\delta, x_0+\delta[,\ |h(x)-\ell| < \sqrt{\varepsilon}\ ; \quad \forall x \in D_k \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[,\ |g(x)-\ell'| < \sqrt{\varepsilon}$$

et donc, toujours en posant $\rho = \min(\delta, \eta)$, on a pour tout $x \in D_h \cap D_k \cap]x_0-\rho, x_0+\rho[$, $|h(x)k(x)| < \varepsilon$. Donc hk converge bien vers 0. Prenons maintenant f et g des fonctions convergentes vers ℓ et ℓ' respectivement. On pose alors pour tout $x \in D_f$ (resp. $x \in D_g$) $h(x) = f(x)-\ell$ (resp. $k(x) = g(x)-\ell'$), et on raisonne comme dans la preuve de la Proposition 3.1.6. □

Preuve de la Proposition 3.3.6. — Nous prouverons plus loin que la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie au moins au voisinage de x_0 (sur tous les points de $D_f \cap]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[$). Par ailleurs, $\frac{1}{\ell}$ existe. Comme précédemment, on traite d'abord le cas $\ell = 1$ en remarquant que dans ce cas, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}$, ce qui implique que pour tout $x \in D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, pour tout $f(x) > \frac{1}{2}$. Prenons maintenant $\varepsilon > 0$, il existe donc un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, si $\rho = \min(\delta, \eta, \sigma)$, pour tout $x \in D_f \cap]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - 1\right| = \left|\frac{f(x) - 1}{f(x)}\right| = \frac{|f(x) - 1|}{|f(x)|} < 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que $\frac{1}{f}$ converge vers 1. Le cas général en découle facilement. □

On peut de plus étudier les limites de composées de fonctions. Rappelons que le domaine de définition naturel d'une composée $g \circ f$ de deux fonctions f et g est l'ensemble $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$. On commence par démontrer un résultat préliminaire, qui permet de considérer sans danger des compositions de limites.

Lemme 3.3.7. — *Soient f et g deux fonctions, et x_0 un point adhérent au domaine de définition $D_{g\circ f}$ de $g \circ f$. Si de plus f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, alors ℓ est adhérent au domaine de définition de g.*

Ce lemme permet de s'assurer qu'étudier la limite de g lorsque y tend vers ℓ est un problème qui a un sens (se souvenir que l'on ne peut prendre de limites qu'en des points adhérents au domaine de définition de la fonction considérée).

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Alors, comme f converge vers ℓ quand x tend vers x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Par ailleurs, x_0 est adhérent au domaine de définition de $g \circ f$, il existe donc x_1 dans $D_{g\circ f}$ tel que $|x_1 - x_0| < \delta$. Comme $D_{g\circ f} \subset D_f$, on a $x_1 \in D_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, et donc $|f(x_1) - \ell| < \varepsilon$. Nous avons donc trouvé un élément y de D_g (cet élément est $y = f(x_1)$) tel que $|y - \ell| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que ℓ est adhérent à D_g. □

Théorème 3.3.8. — *Soient f et g deux fonctions, x_0 un point adhérent au domaine de définition de $g \circ f$, et deux réels ℓ et ℓ' tel que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque x tend vers x_0 et $g(y)$ converge vers L lorsque y tend vers ℓ. Alors $g \circ f(x)$ converge vers L lorsque x tend vers x_0.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(y)$ converge vers L lorsque y tend vers ℓ, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in D_g \cap]\ell - \delta, \ell + \delta[$, $|g(y) - L| < \varepsilon$. De plus, comme $f(x)$ converge vers ℓ lorsque x tend vers x_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Alors, pour tout $x \in D_{g\circ f} \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, x est dans $D_f \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, donc $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, donc $|g(f(x)) - L| < \varepsilon$, et le résultat voulu est démontré. □

En utilisant le même raisonnement, on démontre également le résultat utile suivant (exercice).

Proposition 3.3.9. — *Soit f une fonction, ℓ un point adhérent à son domaine de définition, et un réel L tel que f converge vers L lorsque x tend vers ℓ. Soit par ailleurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers ℓ. Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L.*

En particulier, si f est définie en ℓ, alors on a $L = f(\ell)$ et $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers $f(\ell)$.

3.3.3. Limites en des bornes infinies. — Nous étendons maintenant les considérations précédentes au cas où la limite est prise non pas en un *réel* x_0 adhérent au domaine de définition mais en « $\pm\infty$ ».

Hypothèse. — Pour simplifier, nous supposerons dans tout ce paragraphe que toutes les fonctions f considérées satisfont l'une des deux hypothèses suivantes :

$$(H_+) \quad \exists C > 0 \text{ tel que } [C, +\infty[\subset D_f ,$$

ou bien

$$(H_-) \quad \exists D < 0 \text{ tel que }]-\infty, D] \subset D_f .$$

la première permet de poser la question d'une limite de f en $+\infty$, la seconde de poser la question d'une limite de f en $-\infty$.

Définition 3.3.10. — Soit f une fonction numérique vérifiant (H_+), et ℓ un réel. On dit que **la fonction f converge vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x > A, \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Soit f une fonction numérique vérifiant (H_-), et ℓ un réel. On dit que **la fonction f converge vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x < -A, \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Remarque 3.3.11. — Le lecteur notera la similarité formelle... mais aussi les différences entre cette définition et celle de la limite en un réel adhérent au domaine de définition.

Il n'est pas difficile de démontrer les propriétés suivantes, que nous énonçons par souci de simplicité uniquement dans le cas des limites en $+\infty$ (exercices : énoncer les propriétés analogues pour les limites en $-\infty$, puis prouver toutes ces propriétés).

Proposition 3.3.12. — *Soit f une fonction vérifiant (H_+) et un réel ℓ tel que f converge vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. Alors*
1. *la fonction $|f|$ converge vers $|\ell|$ lorsque x tend vers $+\infty$;*
2. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf converge vers $\lambda\ell$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

Proposition 3.3.13. — *Soient f et g deux fonctions vérifiant (H_+) et des réels ℓ et ℓ' tels que f et g convergent respectivement vers ℓ et ℓ' lorsque x tend vers $+\infty$. Alors,*
1. *la fonction $f + g$ converge vers $\ell + \ell'$ lorsque x tend vers $+\infty$;*
2. *la fonction fg converge vers $\ell\ell'$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

Proposition 3.3.14. — *Soit f une fonction vérifiant (H_+) et un réel $\ell \neq 0$ tel que f converge vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. Alors $\exists B > 0$ tel que $\forall x > B$, $f(x) \neq 0$ et la fonction $\frac{1}{f}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

3.3.4. Limites infinies. — Cette notion ne doit pas être confondue avec la précédente. Nous n'envisageons plus ici le cas où le domaine de définition comprend un intervalle « allant jusqu'à l'infini » mais celui où les *valeurs* de la fonction « tendent vers l'infini ». Pour définir la limite, il nous faut distinguer le cas où celle-ci est prise en un point adhérent au domaine dé définition de celui où elle est prise en $\pm\infty$ (auquel cas on suppose que l'une des deux hypothèses $(H_\pm)$ est vérifiée).

***Définition 3.3.15*.** — Soit f une fonction numérique et x_0 un point adhérent au domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. On dit que **la fonction f tend (ou diverge) vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0** si

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ \ f(x) > A.$$

On dit que **la fonction f tend (ou diverge) vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0** si

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ \ f(x) < -A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ($+\infty$ dans le premier cas, $-\infty$ dans le second)

***Définition 3.3.16*.** — Soit f une fonction numérique vérifiant (H_+), resp. (H_-). On dit que **la fonction f tend (ou diverge) vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$**, resp. lorsque x tend vers $-\infty$, si

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x > B,\ \ f(x) > A,$$

resp. $\forall A > 0,\ \exists B > 0$ tel que $\forall x < -B,\ f(x) > A$. On dit que **la fonction f tend (ou diverge) vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$**, resp. lorsque x tend vers $-\infty$, si

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x > B,\ \ f(x) < -A,$$

resp. $\forall A > 0,\ \exists B > 0$ tel que $\forall x < -B,\ f(x) < -A$.

On note évidemment $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (le choix des signes devant les deux symboles ∞ étant à préciser en fonction de celle des quatre situations possibles qui est envisagée).

3.3.5. Propriétés des limites : un bilan. — Les propriétés des limites infinies sont un peu plus délicates à manipuler, en raison de l'existence de « formes indéterminées ». Plutôt que de les détailler indépendamment des précédentes, nous donnons ci-dessous un tableau qui résume toutes les propriétés énoncées jusqu'ici plus celles concernant les cas où les limites ont des valeurs infinies. Afin d'énoncer les résultats de manière commode, nous décidons des règles conventionnelles suivantes :

Conventions de calcul.

$$|\pm\infty| = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0,$$
$$+\infty + x = +\infty \ \textit{ et } \ -\infty + x = -\infty \ \textit{ pour tout } \ x \in \mathbb{R},$$
$$\lambda(+\infty) = +\infty, \ \textit{ et } \ \lambda(-\infty) = -\infty \ \textit{ pour tout } \ \lambda \in \mathbb{R}_+^*,$$
$$\mu(+\infty) = -\infty, \ \textit{ et } \ \mu(-\infty) = +\infty \ \textit{ pour tout } \ \mu \in \mathbb{R}_-^*.$$

De plus, les situations suivantes sont appelées **formes indéterminées** :

$$+\infty + (-\infty), \quad -\infty + (+\infty), \quad 0 \times (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \textit{et} \quad \frac{x}{0} \ \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soient maintenant f et g deux fonctions qui convergent respectivement vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (tel que a soit adhérent aux domaines de définition de f et de g s'il est réel ou tels que $(H_\pm)$ soit vérifié si a est infini). Les résultats sont alors les suivants :

Fonction	Limite	Commentaire
$\lvert f\rvert$	$\lvert\ell\rvert$	
λf $(\lambda \in \mathbb{R})$	$\lambda\,\ell$	sauf si forme indéterminée
$f+g$	$\ell + \ell'$	sauf si forme indéterminée
fg	$\ell\,\ell'$	sauf si forme indéterminée
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	sauf si forme indéterminée (N.B. $\frac{1}{f}$ doit être bien défini)

Ce tableau doit être compris de la façon suivante : par exemple, pour la troisième ligne, si la limite de f est ℓ et celled e g est ℓ', alors celle de $f+g$ est $\ell + \ell'$ *sauf si la forme est indéterminée*, c'est-à-dire sauf si on se trouve dans le cas où $\{\ell, \ell'\} = \{+\infty, -\infty\}$, auquel cas *on ne peut pas conclure*.

Remarque 3.3.17. — Dans le cas d'une forme indéterminée du type $\frac{x}{0}$, il est parfois possible de conclure. C'est le cas en particulier si le numérateur tend vers $x > 0$ et si le dénominateur tend vers 0 par valeur strictement positives (on dit qu'une fonction f tend vers 0 par valeurs strictement positives si sa limite est 0 et la fonction reste strictemen positive sur tout un intervalle ouvert autour du point où la limite est prise). Dans ce cas, on peut conclure que la limite du quotient vaut $+\infty$ (un résultat similaire est obtenu si f tend vers 0 par valeurs strictement négatives, on obtient alors $-\infty$).

De façon tout à fait similaire à ce qui a été énoncé précédemment, on obtient une propriété de composition des limites de fonctions qui s'étend à la fois aux cas où les limites sont infinies et au cas où elles sont prises en l'infini (les parties de la preuve qui n'ont pas été faites lors de l'étude du Théorème 3.3.8 sont laissées en exercice).

Théorème 3.3.18. — *Soient f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; si a est fini, on suppose que a est un point adhérent au domaine de définition de $g \circ f$ et si a est infini, on suppose que $(H_\pm)$ est vérifiée. Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{y\to\ell} g(y) = L \quad \text{où } \ell, L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

(où g vérifie $(H_\pm)$ si ℓ est infini), alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = L$.

3.3.6. Limites de fonctions et inégalités. — Nous énonçons maintenant les trois résultats analogues à ceux déjà notés pour les suites, dont nous laissons les démonstrations en exercice. **Dans tout ce paragraphe, nous supposons que f est une fonction et que a est un élément de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ qui est adhérent au domaine de définition de f si a est dans $\mathbb{R}$ et tel que l'hypothèse $(H_\pm)$ soit vérifiée s'il est infini**.

Proposition 3.3.19. — *Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell > 0$, alors*
– *dans le cas où a est fini, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $f(x) > 0$;*
– *dans le cas où $a = +\infty$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in]A, +\infty[$, $f(x) > 0$;*
– *dans le cas où $a = -\infty$, il existe un réel $B < 0$ tel que pour tout $x \in]-\infty, B[$, $f(x) > 0$.*

Nous rappelons qu'une fonction f est dite **majorée sur un ensemble** U s'il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in U$, **minorée sur** U s'il existe un réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in U$

et **bornée sur** U s'il existe un réel A tel que $|f(x)| \leq A$ pour tout $x \in U$. Cette dernière propriété est équivalente à : il existe deux réels a et b tels que $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in U$.

Théorème 3.3.20. — *Soit $\ell \in \mathbb{R}$ (donc qui n'est pas infini). Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors*
– *dans le cas où a est fini, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que f soit bornée sur $D_f \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$;*
– *dans le cas où $a = +\infty$, il existe un réel $A > 0$ tel que f soit bornée sur $]A, +\infty[$;*
– *dans le cas où $a = -\infty$, il existe un réel $B < 0$ tel que f soit bornée sur $]-\infty, B[$.*

Enfin, comme pour les suites précédemment, nous tirons d'une inégalité portant sur les valeurs de la fonction un contrôle sur la limite.

Proposition 3.3.21. — *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et de plus, que*
– *dans le cas où a est fini, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $f(x) \geq a$;*
– *dans le cas où $a = +\infty$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in]A, +\infty[$, $f(x) \geq a$;*
– *dans le cas où $a = -\infty$, il existe un réel $B < 0$ tel que pour tout $x \in]-\infty, B[$, $f(x) \geq a$.*
Alors $\ell \geq a$.

Remarque 3.3.22. — Comme précédemment, le fait que l'hypothèse soit renforcée en « $f(x) > a$ pour tout x dans un intervalle *ad hoc* » n'entraîne pas une conclusion renforcée : on ne peut pas obtenir mieux que $\ell \geq a$.

Exercices. —

Exercice 3.3.23. — Reprendre la définition de la convergence et les propriétés des limites et les étendre au cas des suites ou des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3.3.24. — Soit f une fonction et x_0 un point adhérent à son domaine de définition. Montrer que si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et que ces limites coïncident alors f admet une limite en x_0 et que cette limite est égale aux précédentes.

Exercice 3.3.25. — Soit f une fonction et x_0 un point adhérent à son domaine de définition. On suppose qu'un réel ℓ n'est pas limite de f en x_0. Montrer quon peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements du domaine de définition de f et tendant vers x_0 telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers ℓ. En déduire que si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du domaine de définition de f et tendant vers x_0 on a $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) = \ell$ alors f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.

Exercice 3.3.26. — Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et x un point de $\mathbb{R}$ adhérent à A et qui n'est pas de A. Montrer que tout intervalle ouvert contenant x contient une infinité de points de A. En déduire qu'il existe une suite de points de A convergente vers x.

Exercice 3.3.27. — Essayer de prouver toutes les limites nécessaires pour justifier le tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles du polycopié du premier semestre.

Exercice (⋆) 3.3.28. — Soit f une fonction, ℓ un réel adhérent à son domaine de définition et L un autre réel. On suppose que pour *toute* suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \ell$, on a $\lim_{n\to\infty}(f(u_n)) = L$. Montrer alors que $\lim_{x\to\ell} f(x) = L$.

3.4. Fonctions continues

3.4.1. Continuité en un point. — Ayant en main une définition correcte de la limite d'une fonction en un point, nous pouvons maintenant produire une définition rigoureuse de la continuité. Au premier semestre, nous avons écrit qu'**une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ était continue en un point x_0 de domaine de définition si la limite en x_0 de la fonction existe et vaut** $f(x_0)$. (Le lecteur attentif notera qu'en raison des remarques faites aux paragraphes qui précèdent, on aurait pu se contenter d'écrire que la limite existe puisque si c'est le cas, alors elle vaut automatiquement $f(x_0)$.) Nous pouvons désormais retranscrire cette définition de la manière suivante.

Définition 3.4.1. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de son domaine de définition D_f. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Il est important de connaitre la traduction formalisée de la **discontinuité** d'une fonction f en un point x_0 de son domaine de définition. Elle s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \alpha >, \exists x \in D_f \text{ tel que } \ |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Ce critère de discontinuité peut se récrire en terme de construction d'une suite particulière d'éléments du domaine de définition D_f.

Proposition 3.4.2. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et x un point de son domaine de définition D_f. La fonction f est* discontinue *en x si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D_f telle que* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ *et telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$* ne converge pas vers $f(x)$.

On notera que dans cet énoncé la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne doit pas converger vers $f(x)$). Elle peut donc diverger... ou bien converger vers un autre réel. En prenant la négation, nous obtenons bien sûr un critère de continuité.

Proposition 3.4.3. — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et x un point de son domaine de définition D_f. La fonction f est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D_f telle que* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$*, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Les opérations connues sur les limites nous permettent de conclure immédiatement que :

- *si f est continue en un point x, les fonctions $|f|$ et λf (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$) sont continues en x ;*
- *si f et g sont continues en un point x, les fonctions $f + g$ et fg sont continues en x ;*
- *si f est continue en un point x et $f(x) \neq 0$, la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en x.*

On notera que la preuve de la dernière propriété nécessite de démontrer l'énoncé suivant que nous avons déjà rencontré lors de l'étude des limites. Compte-tenu de son importance, il vaut la peine d'être répété.

Proposition 3.4.4. — *Soit f une fonction continue en un point x de son domaine de définition, tel que $f(x) \neq 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall y \in \ D_f \cap \ ]x - \delta, x + \delta[,\ f(y) \neq 0.$$

3.4.2. Continuité sur un ensemble. — La continuité, comme on vient de le voir, est une notion *locale* : on parle de « continuité en un point », et pour la vérifier il suffit de connaitre le comportement de la fonction au voisinage de ce point seulement.

Définition 3.4.5. — Soit f une fonction et A un ensemble inclus dans le domaine de définition de f. On dit que f est **continue sur** A si elle est continue en tout point de A.

Une fonction est simplement dite **continue** si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Il est facile (faites-le !) de transposer au cas des fonctions continues sur un ensemble les résultats issus des opérations sur les limites.

Les résultats suivants ont été vus *sans démonstration* au premier semestre. Leurs preuves montrent qu'ils font profondément intervenir la nature de l'ensemble des nombres réels et la notion de limite.

3.4.3. Valeurs intermédiaires. — Ce résultat est directement relié à l'existence de la borne supérieure de toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée.

Théorème 3.4.6. — *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. — On définit
$$J = \{t \in [a,b] \mid f(t) < 0\}.$$
Le point a est dans J donc J est non-vide et de plus $J \subset [a,b]$ donc J est majoré. Il admet donc une borne supérieure, que nous appelons c et qui est dans $[a,b]$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de J qui converge vers c. Par continuité, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(c)$, ce qui implique que $f(c) \leq 0$ (au passage, on voit ainsi que $c < b$ puisque $f(b) > 0$). Si $f(c) < 0$, nous avons vu que f doit être strictement négative sur un intervalle ouvert contenant c, donc c ne peut pas être la borne supérieure de J. Conclusion : on a nécessairement $f(c) = 0$. □

Remarque 3.4.7. — Rappel : il faut que *tout* l'intervalle $[a,b]$ soit dans le domaine de définition de f, sinon la borne supérieure de J risquerait d'être en-dehors du domaine de définition. De plus, il faut que f soit continue sur tout $[a,b]$ car nous ne savons pas d'emblée où se situe cette borne supérieure... et il est impératif que f soit continue en ce point.

3.4.4. Dérivabilité entraîne continuité. — Résultat d'apparence simple, mais incompréhensible sans une clarification de la notion de limite.

Théorème 3.4.8. — *Soit f une fonction dérivable en un point x. Alors f est continue en x.*

Démonstration. — On note d'abord qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|h| < \delta$ et non nul,
$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| < 1,$$
soit encore pour tout $|h| < \delta$,
$$|f(x+h) - f(x)| < (|f'(x)| + 1)\ |h|.$$
Il est facile de conclure que f est continue en x à partir d'ici. □

3.4.5. Dérivée d'une composée. — Une fois encore, bien comprendre la notion de limite est impératif pour démontrer cette formule.

Proposition 3.4.9. — *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en x et que g est dérivable en $f(x)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x et sa dérivée vaut*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x)).$$

Démonstration. — Il nous faut démontrer que la quantité $\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$ tend vers $f'(x)\, g'(f(x))$ lorsque h tend vers 0. Nous commençons par traiter le cas où la dérivée de g en $f(x)$ s'annule, c'est-à-dire que $g'(f(x)) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a $g(f(x+h)) - g(f(x)) = 0$ si $f(x+h) = f(x)$, tandis que

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si $f(x+h) \neq f(x)$. Par dérivabilité de g et annulation de $g(f(x))$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\left|\frac{g(y)-g(f(x))}{y-f(x)}\right| < \varepsilon$ pour tout y tel que $|y - f(x)| < \alpha$ et $y \neq f(x)$. De plus, par continuité de f en x (*cf*. paragraphe précédent), il existe $\beta > 0$ tel que $|f(x+h) - f(x)| < \alpha$ si $|h| < \beta$, ce qui entraîne donc que pour tout $|h| < \beta$,

$$\left|\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}\right| < \varepsilon$$

dès que $f(x+h) \neq f(x)$ et 0 sinon. Enfin, comme f est dérivable en x, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|h| < \delta$ et non nul,

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq (1 + |f'(x)|)\,.$$

On en déduit que pour tout $h < \min(\delta, \beta)$,

$$\left|\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}\right| < (1 + |f'(x)|)\,\varepsilon.$$

Reste à étendre au cas où g' ne s'annule pas en $f(x)$, mais cela se fait en considérant la fonction définie par $h : y \longmapsto h(y) = g(y) - g'(f(x))\, y$, ce qui achève aisément la preuve. □

Exercices. —

Exercice 3.4.10. — Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ et croissante sur une partie A dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.4.11. — Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si x est rationnel et $f(x) = x$ si x est irrationnel. Etudier la continuité de f.

Exercice 3.4.12. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période 1, c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t + \frac{1}{2}) = f(t)$.

Exercice 3.4.13. — Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - x$ si x est rationnel et $f(x) = x$ si x est irrationnel. Etudier la continuité de f. En déduire une construction d'une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui soit discontinue partout et bijective.

Exercice 3.4.14. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive. Est-il vrai qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $f(x) \geq c$ pour tout x réel ?

Exercice (⋆) 3.4.15. — Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = a$. Montrer que f est dérivable en 0 (on pourra commencer par le cas $a = 0$).

Exercice (⋆) 3.4.16. — 1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 2x^2$ si $x \leq 0$ et $h(x) = x^2$ si $x > 0$. Montrer que h est continue, que sa restriction à $\mathbb{Q}$ est injective mais que h elle-même n'est pas injective.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la restriction à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est injective. Montrer que f est injective.

Exercice (⋆) 3.4.17. — Soit f une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et surjective. On suppose de plus que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est borné.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $A > 0$ tel que ou bien $f([A, +\infty[) \subset [t, +\infty[$ ou bien $f([A, +\infty[) \subset] - \infty, t]$.
2. Onfixe $t_0 \in \mathbb{R}$ et on suppose que c'est la première des deux éventualités précédentes qui est vraie ; montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

CHAPITRE 4

SUITES DE CAUCHY ET SUITES EXTRAITES

4.1. Suites de Cauchy

La définition des suites convergentes que nous avons donnée plus haut est très satisfaisante d'un point de vue théorique. Du point de vue pratique, il est difficile de l'utiliser si on ne connait pas la valeur de la limite, ce qui est souvent le cas dans une situation concrète. Un exemple typique de cette situation survient lorsque les valeurs de la suite sont des valeurs mesurées par un dispositif expérimental (par exemple : u_n est la valeur lue sur l'appareil au bout de n secondes). Si les valeurs mesurées ont tendance à se stabiliser, nous sommes enclins à dire que la suite des valeurs converge. Motivés par ces remarques, nous introduisons la définition suivante.

Définition 4.1.1. — On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq N, \forall q \geq N,\ |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Théorème 4.1.2. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors elle est de Cauchy.*

Démonstration. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, ℓ sa limite, et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq N$. Dès lors, pour tous $m \geq N$ et $n \geq N$,

$$|u_m - u_n| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous allons maintenant étudier plus en détail les suites de Cauchy. La propriété suivante est un bon point de départ.

Proposition 4.1.3. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon = 1$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous p et q plus grands ou égaux à N, $|u_p - u_q| < 1$. En particulier,

$$\forall p \geq N,\ |u_p - u_N| < 1$$

donc la suite $(u_p)_{p\geq N}$ est bornée (pourquoi ?). Comme il n'y a qu'un nombre fini de termes avant le cran N, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Théorème 4.1.4. — *Toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$.*

La convergence systématique des suites de Cauchy s'appelle *complétude*. On dit que $\mathbb{R}$ est **complet**.

Démonstration. — Pour démontrer le théorème, nous allons construire un couple de suites adjacentes tel que leur limite commune (dont nous savons qu'elle existe) soit également la limite souhaitée. Prenons donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Nous savons qu'elle est bornée ; notons alors $A > 0$ un majorant de sa valeur absolue, de telle sorte que pour tout p entier, u_p est dans $[-A, A]$. Nous construisons ensuite par récurrence une suite de segments $I_n = [a_n, b_n]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) qui vérifient les propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la longueur de I_n est au plus $\frac{A}{2^{n-1}}$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$ (les segments sont *emboîtés*) ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, $u_p \in I_n$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formeront alors automatiquement un couple de suites adjacentes.

Pour la construction, on pose bien sûr $I_0 = [-A, A]$, qui convient. Par la suite, supposons $I_0, \ldots, I_n$ construits. Il existe donc un entier N tel que pour tout $p \geq N$, $u_p \in I_n$. On choisit alors $\varepsilon = \frac{A}{2^{n+1}}$: la propriété de Cauchy affirme alors l'existence d'un entier N' tel que pour tous $p \geq N'$ et $q \geq N'$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Fixons maintenant un $p_0 \geq \max(N, N')$: dès lors, pour tout $p \geq p_0$,

$$u_p \in I_n \quad \text{et} \quad |u_p - u_{p_0}| < \varepsilon = \frac{A}{2^{n+1}} \;;$$

on en déduit que tous les u_p (pour $p \geq p_0$) se trouvent dans le segment $I_{n+1} = I_n \cap [u_{p_0} - \varepsilon, u_{p_0} - \varepsilon]$, qui est inclus dans I_n, de longueur inférieure à $\frac{A}{2^n}$. La récurrence est donc terminée.

Nous disposons donc à l'issue de cette construction d'un couple de suites adjacentes, formé par les extrêmités $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite des segments $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui possèdent donc une limite commune, que nous notons désormais ℓ. Il reste à montrer que ℓ est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De fait, soit $\delta > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{A}{2^{n_0+1}} < \delta$, et il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \in I_{n_0}$ pour tout $p \geq M$. Les propriétés de croissance et décroissance des suites adjacentes assurent que $\ell \in I_k$ pour tout entier k, donc $|u_p - \ell|$ est inférieur à la longueur de I_{n_0} pour tout $p \geq M$, c'est-à-dire que $|u_p - \ell| < \delta$ pour tout $p \geq M$. □

► **Remarque**. — La convergence des suites de Cauchy constitue la *troisième propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels*, sur le même plan que la convergence des couples de suites adjacentes ou que l'existence de la borne supérieure de toute partie non-vide majorée. Pour écrire un énoncé précis, il faut introdure la notion de corps ordonné, c'est-à-dire d'ensemble disposant à la fois des opérations d'addition de multiplication similaires à celles de $\mathbb{R}$ et d'un ordre avec les compatibilités usuelles entre ordre et opérations. On a alors équivalence entre

1. le caractère archimédien et la convergence des couples de suites adjacentes dans ce corps ;
2. l'existence de la borne supérieure de toute partie non-vide majorée de ce corps ;
3. le caractère archimédien et complet de ce corps.

Nous avons en fait déjà vu l'équivalence entre les deux premières, et une relecture attentive de la preuve du Théorème 4.1.4 montre que la convergence des suites adjacentes y joue un rôle crucial, ce qui montre l'implication $1 \Rightarrow 3$. On peut de plus facilement montrer que la convergence des suites de Cauchy entraîne l'existence de la limite commune des couples de suites adjacentes. Prenons en effet un tel couple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $q \geq p \geq n$,

$$u_n \leq u_p \leq u_q \leq v_q \leq v_p \leq v_n.$$

Ainsi, si une inégalité du type $|u_n - v_n| < a$ est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et un certain $a > 0$, on a $0 \leq u_q - u_p < a$ pour tous $q \geq p \geq n$ et donc $|u_p - u_q| < a$ pour tous $p \geq n$ et $q \geq n$. Cette remarque entraîne facilement que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy, donc convergent, et comme leur différence tend vers 0, leurs limites sont égales.

Il existe (au moins) trois constructions classiques de $\mathbb{R}$, toutes équivalentes, mais dont chacune met en évidence l'ensemble des nombres réels comme un ensemble possédant une de ces trois propriétés. Nous avons fait le choix dans le chapitre précédent de décrire celle conduisant à la première (*via* les développements décimaux illimités). Celles conduisant aux deuxièmes et troisièmes caractérisations sont historiquement les plus importantes : celle associée à la deuxième propriété s'appelle *consruction par les coupures* et est due au mathématicien allemand Richard Dedekind en 1872. Celle conduisant à la troisième propriété est peut-être la plus riche du point de vue de sa descendance mathématique : elle permet en effet, à partir de n'importe quel ensemble (raisonnable...) dans lequel certaines suites de Cauchy n'ont pas de limite d'en fabriquer un *complété*, c'est-à-dire un espace plus gros mais dans lequel toutes les suites de Cauchy trouvent une limite. L'histoire de cette dernière construction est plus complexe : elle trouve son origine dans les travaux d'Augustin-Louis Cauchy vers 1821, mais n'a été formalisée rigoureusement que par Charles Meray vers 1869 et indépendamment par Georg Cantor (que nous retrouvons pour la troisième fois) en 1872. ◄

Exercices. —

Exercice 4.1.5. — Soit $q > 1$ et $u_n = 1 + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite est de Cauchy. Quel résultat bien connu retrouve-t-on ainsi ?

Exercice 4.1.6. — Soit $k \in]0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On définit $v_n = 1\cos(1) + k\cos(\theta) + \cdots + k^n\cos(\theta^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que cette suite est convergente.

Exercice 4.1.7. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 4.1.8. — Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 4.1.9. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la propriété suivante : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$. Montrer que la suite est de Cauchy.

Exercice 4.1.10. — Donner un exemple de suite bornée qui n'est pas de Cauchy.

Exercice 4.1.11. — Etendre la notion de suite de Cauchy aux limites de fonctions. Montrer que si une fonction est de Cauchy en un point adhérent à son domaine de définition, alors elle admet une limite en ce point.

Exercice 4.1.12. — Montrer que si f est une fonction numérique définie et dérivable sur $]0,1]$ telle que f' converge vers un réel a en 0, alors f admet une limite à droite en 0 (*indication* : montrer avec le théorème des accroissements finis que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive tendant vers 0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, puis utiliser l'exercice 3.3.25).

Exercice (⋆) 4.1.13. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *décroissante* de réels *positifs* tels que la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge.

a. En utilisant le fait que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq (p+1)u_{N+p} < \varepsilon$.
b. En déduire que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

4.2. Suites extraites

Considérons quelques instants la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout n entier. Nous savons qu'elle est divergente, mais tout lecteur moyennement observateur aura remarqué que l'on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ pour tout n. On trouve donc « à l'intérieur de cette suite » deux autres suites qui, elles, sont convergentes (vers deux limites différentes, d'ailleurs). Il peut donc être intéressant, lorsque l'on se trouve confronté à une suite, d'être capable d'« extraire » une suite d'une autre afin de mieux en étudier les propriétés. Le but de ce paragraphe est de donner un sens solide à cette idée.

4.2.1. Définitions. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

Définition 4.2.1. — La **suite extraite** ou **sous-suite** associée à la donnée de φ est la suite définie par

$$v_n = u_{\varphi(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple. — Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite. Il s'agit en effet de la suite définie par $v_n = u_{2n}$ pour tout n, soit encore la suite extraite associée à l'application strictement croissante $n \mapsto 2n$.

Par la suite, lorsque nous parlerons d'une suite extraite, nous ne donnerons pas obligatoirement un nouveau nom à la suite extraite et n'expliciterons pas nécessairement l'application φ. Le cas le plus fréquent est évidemment celui où cette dernière est évidente, comme c'est le cas dans l'exemple précédent : on se contente alors d'écrire la suite sous la forme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que de préciser qu'il s'agit d'une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que celle-ci est définie par $v_n = u_{2n}$ pour tout n. Il s'agit d'un *abus de notation* et il faut garder en mémoire que la suite extraite est une *nouvelle* suite (qui se déduit de la première) et qui devrait donc hériter d'une nouvelle notation !

Une autre notation couramment rencontrée est la suivante : l'application $\varphi : k \mapsto \varphi(k)$ est elle-même interprétée comme une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$n_k = \varphi(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ce qui conduit donc à noter la suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposition 4.2.2. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors toute suite extraite de celle-ci converge vers la même limite.*

Démonstration. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers ℓ, φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sous-suite associée, définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout n. Soit de plus $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Par ailleurs, on dispose du lemme suivant.

Lemme 4.2.3. — *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration du lemme. – On raisonne par récurrence. Déjà, $\varphi(0) \geq 0$. De plus, si $\varphi(n) \geq n$, alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ donc $\varphi(n+1) \geq n+1$. □

Fin de la démonstration de la propriété 4.2.2. Appliquons le lemme : pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \geq N$ et donc $|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. □

Cette preuve montre à nouveau que la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout n entier ne peut pas converger. En effet, si elle convergeait, la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auraient la même limite, c'est-à-dire 1, tandis que la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auraient la même limite, donc -1. Contradiction...

4.2.2. Compacité. — S'agissant des suites extraites, le théorème fondamental est le suivant.

Théorème 4.2.4. — *Soit* $[a,b]$ *un* segment *(intervalle fermé borné), et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* dont tous les termes sont dans $[a,b]$. *Alors il existe une sous-suite qui converge et la limite est dans* $[a,b]$.

Remarque 4.2.5. —

1. Attention, le théorème affirme l'existence d'une sous-suite convergente, mais il ne donne aucune indication sur la nature de cette sous-suite et sur les moyens de la trouver. Il ne dit également *rien* sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout entière.
2. Par ailleurs, il est fondamental que tous les termes de la suite restent dans un intervalle *borné*. A titre d'exemple, considérons l'intervalle non borné $[0,+\infty[$ et la suite des entiers naturels : il est clair qu'elle n'admet aucune sous-suite convergente.
3. Si l'intervalle est borné mais n'est pas fermé, il est évidemment contenu dans un intervalle fermé et borné obtenu en lui ajoutant les éventuelles extrêmités manquantes : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet toujours une sous-suite convergente *mais la limite se situe dans l'intervalle fermé et borné qui contient l'intervalle initial* et pas nécessairement dans ce dernier (exemple : la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans l'intervalle $]0,1[$).
4. Enfin, on notera que l'énoncé peut être réécrit de la manière (très utile) suivante : *de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente*.

Ce théorème est parfois désigné comme le théorème de **compacité** des segments. Seront en effet introduits plus tard dans vos études mathématiques une classe d'ensembles qui vérifient la propriété d'existence de sous-suite convergentes, appelés *ensembles compacts*.

Démonstration. — La démonstration repose, une fois encore, sur les propriétés des couples de suites adjacentes. Nous allons construire par récurrence à la fois une sous-suite (c'est-à-dire une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) et une suite de segments $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ emboités et de longueur tendant vers 0, de telle sorte que $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(p)} \in I_p$. Les extrêmités des I_p forment un couple de suites adjacentes, qui converge donc vers une même limite, et nous en déduirons que la sous-suite associée à φ converge alors nécessairement vers la même limite.

Plus précisément, nous considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont dans un segment fixé $[a,b]$, et nous notons $M = |b-a|$. Nous construisons maintenant par récurrence une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (concrètement, nous construisons en fait la suite définie par $n_p = \varphi(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$) et une suite de segments $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tels que

1. pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+1} \subset I_p$;
2. pour tout $p \in \mathbb{N}$, la longueur de I_p est $2^{-p}M$;
3. pour tout $p \in \mathbb{N}$, il y a une infinité d'entiers n tels que $u_n \in I_p$;
4. pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(p)} \in I_p$.

On note que par emboîtement successif des intervalles, la dernière condition entraîne en fait que $u_{\varphi(q)} \in I_p$ pour tout $q \geq p$.

L'amorce consiste bien sûr à poser $I_0 = [a, b]$ et $\varphi(0) = 0$. Supposons maintenant $I_0, \ldots, I_n$ et $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ construits. Ecrivons alors $I_n = J_1 \cup J_2$ où J_1 et J_2 sont deux segments de longueur moitié de celle de I_n et ayant pour seule intersection le milieu de I_n. Un de ces deux intervalles contient alors nécessairement une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous le choisissons donc pour être le segment I_{n+1} (sa longueur est donc bien égale à $2^{-(n+1)}M$). Il ne reste plus qu'à choisir un $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \varphi(n)$ et $u_m \in I_{n+1}$, ce qui est toujours possible puisque I_{n+1} contient une infinité de termes de la suite : on pose alors $\varphi(n + 1) = m$.

Comme précédemment, les suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ des extrêmités des segments $I_p = [a_p, b_p]$ forment un couple de suites adjacentes. Il existe donc une limite commune ℓ. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon < a_n < b_n < \ell + \varepsilon,$$

ce qui implique nécessairement

$$\ell - \varepsilon < u_{\varphi(n)} < \ell + \varepsilon,$$

prouvant donc la convergence de la sous-suite vers ℓ. □

4.2.3. Application : preuve de l'existence des extrêma. — Commençons par rappeler que pour toute fonction f, $\sup_A f$ désigne la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par f sur A, *i.e.*

$$\sup_A f \ = \ \sup \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A \text{ tel que } z = f(x)\}.$$

Cette notion n'a évidemment de sens que si f est majorée sur A (et que A contient des points du domaine de définition de f). On définit de même la borne inférieure. L'énoncé suivant est alors bien connu.

Théorème 4.2.6. — *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors f est bornée et il existe deux points c et d de $[a, b]$ tels que*

$$f(c) = \sup_{[a,b]} f, \quad f(d) = \inf_{[a,b]} f.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que f est majorée et que la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs est atteinte. Par l'absurde, supposons f non majorée il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b]$ telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ (montrez-le !). Mais cette suite est bornée, donc il en existe une sous-suite convergente vers un point x de $[a, b]$ (car $a \leq f(x_n) \leq b$ pour tout n). Par continuité, les valeurs de f en les points de la sous-suite doivent nécessairement tendre vers $f(c)$, ce qui contredit le fait que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. La fonction f est donc majorée.

De la caractérisation de la borne supérieure, on déduit de nouveau l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b]$ telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $\sup_{[a,b]} f$. Mais, comme à l'instant, il en existe une sous-suite convergente vers un point c de $[a, b]$ et par continuité on doit avoir $f(c) = \sup_{[a,b]} f$. □

Remarque 4.2.7. — Rappelons que le contenu du théorème est double : en premier lieu, il assure que la fonction est bornée, et en second lieu qu'il existe effectivement des points où le maximum et le minimum de la fonction sont atteints. Le fait que l'intervalle considéré soit fermé borné est essentiel : le caractère borné sert à extraire une sous-suite convergente, dont la limite existe donc... et doit être dans l'intervalle, d'où l'importance qu'il contienne ses bornes.

Lorsque la fonction est continue sur un intervalle fermé borné (comme dans le théorème précédent), on trouve parfois les notations

$$\max_{[a,b]} f, \quad \min_{[a,b]} f$$

pour désigner les bornes supérieures et inférieures des valeurs prises par f, ce qui permet d'insister sur le fait que chacune de ces bornes est effectivement atteinte et constitue donc le plus grand/plus petit élément de $f([a,b])$.

Exercices. —

Exercice 4.2.8. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergente vers $+\infty$. Montrer que toute sous-suite est également divergente vers $+\infty$.

Exercice 4.2.9. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que la sous-suite « paire » $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la sous-suite « impaire » $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la *même* limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 4.2.10. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 4.2.11. — Soit f une fonction continue et $[a,b]$ un intervalle fermé borné contenu dans son domaine de définition ; prouver que $f([a,b])$ est un intervalle fermé borné.

Exercice 4.2.12. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers 0.

a. Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas décroissante.

b. Dans le cas général, montrer qu'il existe une suite décroissante extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.2.13. — Donner des exemples de suites n'ayant aucune sous-suite convergente.

Exercice 4.2.14. — Soit f une fonction continue. Soit x un point de son domaine de définition ; prouver que si f tend vers 0 en x alors

$$M(h) = \max_{[x-h,x+h]} |f|$$

tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Exercice 4.2.15. — On considère une suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la propriété suivante : il existe un réel ℓ tel que toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente converge vers ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. Pourquoi faut-il ajouter « bornée » ?

Exercice (⋆) 4.2.16. — On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un réel qui est la limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérences d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors A est borné.

b. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont dans A.

Exercice (⋆) 4.2.17. — On utilise les mêmes notations que dans l'exercice précédent et on fait ici l'hypothèse que la suite $(u_n - u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que A est un intervalle (*indication* : on pourra utiliser le critère suivant : si $I \subset \mathbb{R}$, I est un intervalle $\Leftrightarrow \forall x \in I, \forall y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in I$).

Exercice 4.2.18. — Cet exercice utilise les notions introduites dans les deux exercices précédents. Donner des exemples de suites n'ayant aucune valeur d'adhérence, puis donner des exemples de suites *divergentes* ayant une et une seule valeur d'adhérence, puis deux valeurs d'adhérence.

Exercice (⋆) 4.2.19. — Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels donnés sous forme irréductible : $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel. Montrer qu'alors la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend nécessairement vers l'infini.

4.3. Intégrales

L'objectif de cette section est de donner une application extrêmement importante, au moins sur le plan théorique (mais pas seulement, comme on essaiera de l'expliquer plus loin), de la notion de suite de Cauchy : la construction de l'intégrale. Il importe en premier lieu de bien comprendre pourquoi la notion d'intégrale n'est pas évidente. Pour cela, nous reprenons un paragraphe présent dans le polycopié du premier semestre : « La définition la plus communément admise de l'intégrale d'une fonction (en tout cas, celle le plus fréquemment rencontrée dans le secondaire) consiste à déclarer que l'intégrale d'une fonction positive entre deux réels a et b est égale à l'aire de la région délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction entre a et b et les deux droites verticales d'abscisses a et b. Cette définition, très satisfaisante au premier abord, ne résiste malheureusement pas très longtemps à un examen plus approfondi. En effet, qu'est-ce donc que l'aire d'une région délimitée par des courbes ? Et comment la calcule-t-on ? Nous pouvons calculer aisément l'aire d'un rectangle[(1)] et justifier aisément ce calcul. Mais l'aire sous la courbe ? ».

Définir l'intégrale d'une fonction non-constante est donc un objectif complexe, et cette section a pour objectif de donner quelques idées dans cette direction. Nous aborderons le problème de la définition rigoureuse de l'intégrale des fonctions numériques en suivant les principes suivants :

(i) l'aire située sous la courbe d'une fonction f (pas nécessairement de signe fixé) doit être la « limite » des aires d'unions de rectangles « approximant » la région qui nous intéresse ;
(ii) nous devons être capables d'identifier des fonctions f pour lesquelles ces suites d'aires de rectangles convergent, et telle que l'aire limite obtenue soit la même quelle que soit la suite d'approximations rectangulaires choisie.

Afin de mener à bien ce programme, il nous faut prendre quelques minutes afin de définir une classe particulière de fonctions.

4.3.1. Fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes. —

Définition 4.3.1. — Soit f une fonction et I un intervalle contenu dans son domaine de définition. On dit que f est *uniformément continue* sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \forall y \in I,\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Cette propriété ne doit pas être confondue avec la continuité de f : elle est beaucoup plus forte puisqu'elle affirme que, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\delta > 0$ *valable pour tous les points de* $[a,b]$ (c'est le sens du mot « uniforme ») tel que la propriété qui suit (et qui est similaire à la continuité) soit vérifiée. La simple continuité de f s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b], \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Autrement dit le $\delta > 0$ fourni dépend du réel x où on se trouve dans la continuité, ce qui n'est pas le cas dans la continuité *uniforme* !

Un exemple typique de fonction qui n'est pas uniformément continue sur son domaine de définition est la fonction $x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (exercice !).

***Théorème 4.3.2* (Théorème de Heine)**. — *Soit f une fonction définie et continue sur un* segment $[a,b]$. *Alors f est uniformément continue sur* $[a,b]$.

[(1)] et donc de nombreuses autres figures qui se déduisent d'un rectangle, comme les triangles, les losanges, les trapèzes, etc.

Démonstration. — Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe x_n et y_n dans $[a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente. Comme $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la sous-suite $(y_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et de même limite. Par souci de simplicité, nous ne considèrerons maintenant que ces sous-suites et les appellerons donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ leur limite. Comme $\ell \in [a, b]$ et que f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout z dans $[a, b]$,

$$|z - \ell| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\ell)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \delta$ et $|y_n - \ell| < \delta$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour $n \geq N$,

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - \ell| + |f(y_n) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci contredit les hypothèses ayant donné naissance aux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et prouve donc le Théorème de Heine. □

On dispose d'un critère commode pour identifier certaines fonctions uniformément continues.

Définition 4.3.3. — Soit f une fonction et I un intervalle contenu dans son domaine de définition. On dit que f est *lipschitzienne* sur I s'il existe un réel $K \geq 0$ tel que

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \ |f(x) - f(y)| \ \leq \ K|x - y|$$

(le réel K est appelé *rapport de Lipschitz de la fonction* f).

Lemme 4.3.4. — *Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur I.*

Démonstration. — Soit f une fonction lipschitzienne de rapport K sur I. Si $K = 0$, la fonction est constante et il n'y a rien à démontrer.

Sinon, prenons $\varepsilon > 0$ et posons $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Soient de plus $x \in I$ et $y \in I$ tels que $|x - y| < \delta$. Alors

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ K|x - y| \ < \ K\delta \ = \ \varepsilon.$$

Ainsi, f est uniformément continue sur I. □

4.3.2. Initiation à l'intégration. —

Définition 4.3.5. — Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On appelle *somme de Riemann d'ordre n* attachée à f

$$\Sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \tfrac{(b-a)}{2^n} \, f\left(a + k\tfrac{b-a}{2^n}\right).$$

La somme de Riemann d'ordre n est une tentative (et pour l'instant seulement une tentative) d'approximation de l'intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$: pour ce faire, on remplace la fonction f sur chacun des 2^n petits segments $\left[a + k\frac{b-a}{2^n}\ ,\ a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}\right]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ par une fonction constante, égale à $f\left(a + k\frac{b-a}{2^n}\right)$ c'est-à-dire à la valeur de f en l'extrêmité gauche de chaque petit segment. On notera par ailleurs qu'on découpe en 2^n intervalles à chaque étape : ce choix est commode car le nombre de segments est multiplié par 2 à chaque pas : chaque segment apparaissant à l'étape n est divisé en deux pour l'étape $n + 1$.

Théorème 4.3.6. — *Soit f une fonction définie et* continue *sur un segment* $[a,b]$. *Alors la suite des sommes de Riemann* $(\Sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy. On appelle sa limite* intégrale de f *sur* $[a,b]$, *qu'on note* $\int_a^b f$.

Démonstration. — Soient m et n deux entiers tels que $n \geq m$. Alors on peut ranger les 2^n segments apparaissant dans $\Sigma_n(f)$ par paquets de 2^{n-m} segments successifs, de telle sorte que

$$\Sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{2^m-1}\left(\sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1} \tfrac{(b-a)}{2^n}\, f\left(a + (2^{n-m}k+\ell)\tfrac{b-a}{2^n}\right)\right),$$

que l'on peut alors comparer à

$$\Sigma_m(f) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \tfrac{(b-a)}{2^m}\, f\left(a + k\tfrac{b-a}{2^m}\right).$$

De fait, la différence entre $\Sigma_n(f)$ et $\Sigma_m(f)$ fait apparaitre une double somme

$$\sum_{k=0}^{2^m-1}\left(\sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1}\left[\tfrac{(b-a)}{2^n}\, f\left(a + (2^{n-m}k+\ell)\tfrac{b-a}{2^n}\right)\right] - \tfrac{(b-a)}{2^m}\, f\left(a + k\tfrac{b-a}{2^m}\right)\right).$$

qui peut se réécrire comme

$$\sum_{k=0}^{2^m-1}\tfrac{(b-a)}{2^m}\left(\sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1}\left[\tfrac{1}{2^{n-m}}\, f\left(a + (2^{n-m}k+\ell)\tfrac{b-a}{2^n}\right)\right] - f\left(a + k\tfrac{b-a}{2^m}\right)\right)$$

ou encore comme

$$\sum_{k=0}^{2^m-1}\tfrac{(b-a)}{2^m}\left(\sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1}\tfrac{1}{2^{n-m}}\left[f\left(a + (2^{n-m}k+\ell)\tfrac{b-a}{2^n}\right) - f\left(a + k\tfrac{b-a}{2^m}\right)\right]\right)$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme nous sommes sur un segment $[a,b]$, la fonction f n'est pas seulement continue mais est uniformément continue sur $[a,b]$. Ainsi, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous x et y tels que $|x-y| < \frac{(b-a)}{2^{m_0}}$ à l'intérieur de $[a,b]$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ainsi, pour tous entiers m et n plus grands que m_0, et pour tous k et ℓ entiers tels que $0 \leq k < 2^m$ et $0 \leq \ell < 2^{n-m}$, on a

$$\left|f\left(a + (2^{n-m}k+\ell)\tfrac{b-a}{2^n}\right) - f\left(a + k\tfrac{b-a}{2^m}\right)\right| < \varepsilon$$

puisque

$$\left|\left(a + (2^{n-m}k+\ell)\frac{b-a}{2^n}\right) - \left(a + k\frac{b-a}{2^m}\right)\right| = \left|\ell\frac{b-a}{2^n}\right| < 2^{n-m}\frac{b-a}{2^n} \leq \frac{b-a}{2^{m_0}}.$$

Dès lors, pour tous entiers m et n plus grands que m_0,

$$|\Sigma_n(f) - \Sigma_m(f)| \leq \sum_{k=0}^{2^m-1}\tfrac{(b-a)}{2^m}\left(\sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1}\tfrac{\varepsilon}{2^{n-m}}\right) \leq \sum_{k=0}^{2^m-1}\tfrac{(b-a)}{2^m}\varepsilon \leq (b-a)\,\varepsilon.$$

La suite $(\Sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien de Cauchy. □

Ce résultat permet donc de montrer l'existence de l'intégrale de n'importe quelle fonction continue.

Exercices. —

Exercice 4.3.7. — Montrer qu'une fonction unifomément continue est continue, et que la réciproque est fausse.

Exercice 4.3.8. — Montrer qu'une fonction uniformément continue n'est pas nécessairement lipschitzienne.

Exercice 4.3.9. — Montrer qu'une fonction dérivable et dont la dérivée est bornée est lipschitzienne. En déduire qu'un fonction de classe C^1 est nécessairement lipschitzienne sur tout segment.

Exercice 4.3.10. — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels positifs a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a|x| + b.$$

Exercice 4.3.11. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, telle qu'il existe une autre fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) $\varphi(0) = 0$ et φ est continue en 0 ;
(b) pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq \varphi(x - y)$.

Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. *Question subsidiaire* : montrer que si f est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors il existe toujours une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (a) et (b) (une telle fonction φ s'appelle un *module de continuité* pour f).

► **Une autre manière de procéder pour construire l'intégrale pour les fonctions bornées** :

Définition 4.3.12. — Soit f une fonction définie et *bornée* sur un segment $[a, b]$. On appelle *sommes de Darboux inférieure et supérieure d'ordre n* attachées à f

$$S_n^-(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{(b-a)}{2^n} \left(\inf_{\left[a+k\frac{b-a}{2^n},\, a+(k+1)\frac{b-a}{2^n}\right]} f \right), \quad S_n^+(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{(b-a)}{2^n} \left(\sup_{\left[a+k\frac{b-a}{2^n},\, a+(k+1)\frac{b-a}{2^n}\right]} f \right).$$

On a alors, de manière similaire à ce qui précède.

Théorème 4.3.13. — *Soit f une fonction définie et* continue *sur un segment* $[a, b]$. *Alors les suites des sommes de Darboux inférieures et supérieures* $(S_n^-(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(S_n^+(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *forment un couple de suites adjacentes, qui convergent vers l'intégrale de f sur* $[a, b]$.

Démonstration. – Il est clair que $S_n^-(f) \leq S_n^+(f)$ pour tout n entier. De plus, en organisant les sommes comme dans la démonstration de (1), on a, pour $n \geq m$,

$$S_n^-(f) - S_m^-(f) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \left(\sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1} \frac{(b-a)}{2^n} \left[\inf_{[a+(2^{n-m}k+\ell)\frac{b-a}{2^n},\, a+(2^{n-m}k+\ell+1)\frac{b-a}{2^n}]} f \right] - \frac{(b-a)}{2^m} \left[\inf_{[a+k\frac{b-a}{2^m},\, a+(k+1)\frac{b-a}{2^m}]} f \right] \right),$$

c'est-à-dire

$$S_n^-(f) - S_m^-(f) = \sum_{k=0}^{2^m-1} \frac{(b-a)}{2^m} \sum_{\ell=0}^{2^{n-m}-1} \frac{(b-a)}{2^{n-m}} \left(\left[\inf_{[a+(2^{n-m}k+\ell)\frac{b-a}{2^n},\, a+(2^{n-m}k+\ell+1)\frac{b-a}{2^n}]} f \right] - \left[\inf_{[a+k\frac{b-a}{2^m},\, a+(k+1)\frac{b-a}{2^m}]} f \right] \right).$$

Or, si I et J sont des parties de $\mathbb{R}$ telles que $I \subset J$, on a nécessairement $\inf_I f \geq \inf_J f$ donc il s'ensuit que, si $n \geq m$, alors $S_n^-(f) - S_m^-(f) \geq 0$. En raisonnant avec des bornes supérieures, on en déduit aussi que $S_n^+(f) - S_m^+(f) \leq 0$ si $n \geq m$.

Il reste donc à montrer que la différence des deux suites tend bien vers 0. Or pour tout n entier,

$$S_n^+(f) - S_n^-(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{(b-a)}{2^n} \left(\left[\sup_{\left[a+k\frac{b-a}{2^n},\, a+(k+1)\frac{b-a}{2^n}\right]} f \right] - \left[\inf_{\left[a+k\frac{b-a}{2^n},\, a+(k+1)\frac{b-a}{2^n}\right]} f \right] \right),$$

On fixe maintenant $\varepsilon > 0$. Alors d'après le lemme il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous x et y tels que $|x - y| < \frac{(b-a)}{2^{m_0}}$ à l'intérieur de $[a, b]$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, donc pour tout intervalle J de longueur strictement plus petite que $\frac{(b-a)}{2^{m_0}}$,

$$0 \leq \sup_J f - \inf_J f \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout entier n plus grand que m_0,

$$0 \leq S_n^+(f) - S_n^-(f) \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{(b-a)}{2^n} \varepsilon = (b-a)\varepsilon.$$

Ainsi, la différence tend bien vers 0. La preuve du fait que toutes ces suites ont une même limite est laissée en exercice au lecteur. □

L'histoire ne s'arrête pas là, bien au contraire. En effet, on peut montrer que si f est une fonction simplement bornée (et non plus continue), alors la convergence des sommes de Riemann ou de Darboux sont des énoncés « équivalents ». Ceci a pour conséquence fondamentale qu'il existe un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions bornées, *bien plus large que les fonctions continues*, pour lesquelles les suites des sommes de Riemann et de Darboux convergent. Ces remarques datent de 1854 et sont dues à Bernhard Riemann (1826–1866), mathématicien extrêmement prolifique du XIXe siècle. Pour ces fonctions, que nous appellerons désormais *intégrables au sens de Riemann*, on peut donc définir l'intégrale comme la limite commune de toutes ces sommes.

L'intérêt conceptuel de cette découverte est fondamental : elle a en effet ouvert la porte à l'idée que l'intégrale pouvait avoir un sens pour une très large classe de fonctions, comprenant en particulier de nombreuses fonctions très irrégulières (c'est-à-dire très éloignées des fonctions continues). Quelques 70 ans plus tard (1928), le mathématicien français Henri Lebesgue (1875-1941) introduisait une nouvelle classe de fonctions intégrables, encore plus large, en modifiant radicalement le procédé de construction de l'intégrale (voir le polycopié du premier semestre pour quelques indications très sommaires). La théorie de Lebesgue allait se révéler d'une importance considérable, y compris du point de vue pratique. Les fonctions couvertes par cette théorie se retrouvent dans la modélisation de très nombreux phénomènes physiques et les outils développés à la suite de celle-ci interviennent dans de nombreuses applications des mathématiques. Les citer toutes serait totalement impossible, elles couvrent des domaines aussi divers que l'imagerie médicale, la recherche pétrolière et minière, la mise au point de structures pour l'aéronautique, la compression de données en informatique (les formats d'images et de sons JPEG et MP3), etc. ◂